Funktionen

Grundbegriffe, Verschiebung, Skalierung

- Definition (Funktion)

  Es seien A und B Mengen. Eine ***Funktion*** (oder *Abbildung*) f von A nach B,
  $$f\,:\,A \longrightarrow B$$
  ist eine Vorschrift, die jedem Element $x \in A$ genau ein Element $y \in B$ zuordnet. Schreibweise:
  $$y = f(x).$$
  Dabei heißt x die *unabhängige* und y die *abhängige* Variable.

  Die Menge A heißt ***Definitionsbereich*** (oder *Definitionsmenge*) von f, geschrieben $D(f)$. Die Menge $\{y|\, y = f(x),\, x \in A\} \subseteq B$ heißt ***Wertebereich*** (oder *Wertemenge*, *Bildmenge*) von f, kurz $W(f)$.

- Skizzen:

  1. Schematische Darstellung der Zuordnung $y = f(x)$,
  2. $f(a) = f(b)$ ist erlaubt,
  3. ein Beispiel für eine nicht erlaubte Zuordnung.

- Definition (Graph)

  Der ***Graph*** einer Funktion $f\,:\,A \longrightarrow B$ ist die Menge der geordneten Paare $\{(x, y)|\, x \in A \text{ und } f(x) = y\}$.

- Beispiele: Wir betrachten die Graphen

  - der Potenzfunktionen $y = x^2$, $y = x^3$ und $y = x^4$,
  - der Wurzelfunktionen $y = \sqrt{x}$ und $y = \sqrt[3]{x}$,
  - der Winkelfunktionen $y = \sin(x)$ und $y = \cos(x)$.

  Siehe die Abbildungen auf den folgenden Seiten.

- Beispiel: Parameterdarstellung einer Funktion.

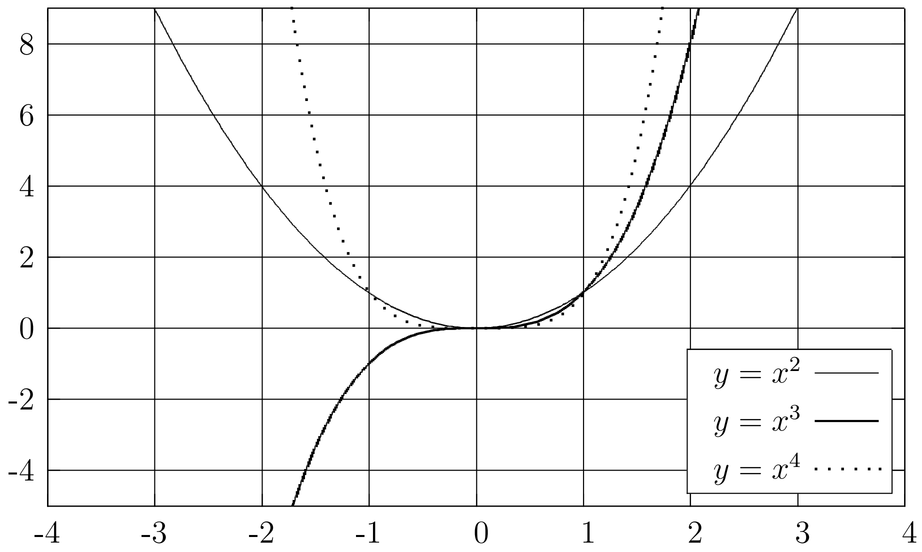

Abbildung 1: Potenzfunktionen

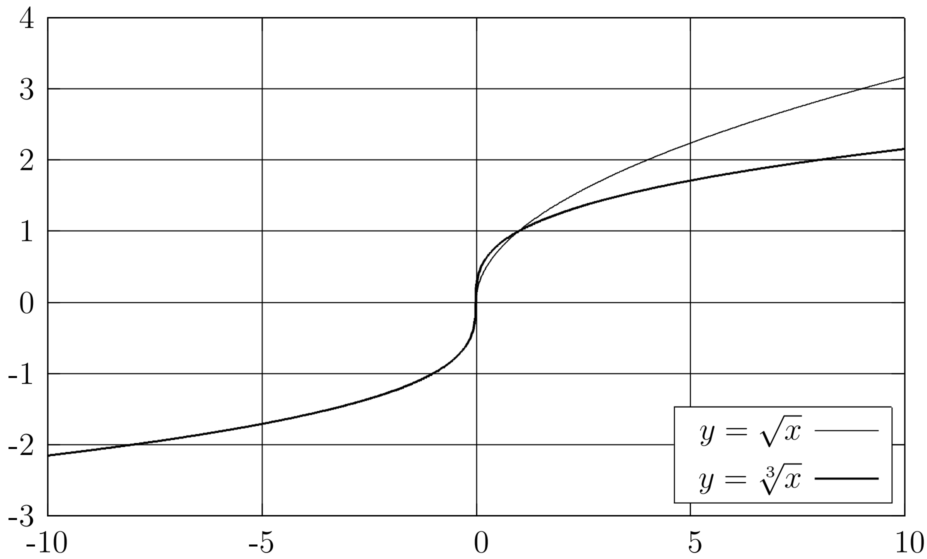

Abbildung 2: Wurzelfunktionen

- Definition (Eigenschaften von Funktionen)

  Eine Funktion heißt

  gerade $\quad \Leftrightarrow \quad f(-x) = f(x)$ für alle $x \in D(f)$;

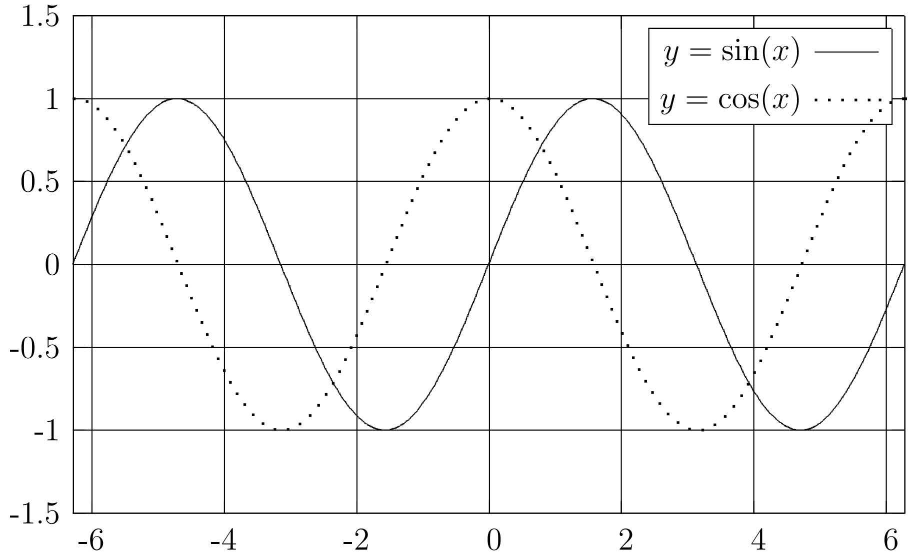

Abbildung 3: Winkelfunktionen

ungerade $\Leftrightarrow$ $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in D(f)$;

monoton wachsend $\Leftrightarrow$ $f(x_2) \geq f(x_1)$ für $x_2 > x_1$ mit x_1, $x_2 \in D(f)$;

streng monoton wachsend $\Leftrightarrow$ $f(x_2) > f(x_1)$ für $x_2 > x_1$ mit x_1, $x_2 \in D(f)$;

monoton fallend $\Leftrightarrow$ $f(x_2) \leq f(x_1)$ für $x_2 > x_1$ mit x_1, $x_2 \in D(f)$;

streng monoton fallend $\Leftrightarrow$ $f(x_2) < f(x_1)$ für $x_2 > x_1$ mit x_1, $x_2 \in D(f)$;

(streng) monoton $\Leftrightarrow$ f (streng) monoton wachsend oder fallend;

periodisch $\Leftrightarrow$ existiert ein $p > 0$ mit $f(x+p) = f(x)$ für alle $x \in D(f)$;

beschränkt $\Leftrightarrow$ existiert ein $k > 0$ mit $|f(x)| \leq k$ für alle $x \in D(f)$.

- Veranschaulichungen und Beispiele.

- Verschiebung von Funktionen

  Die Kurve der Funktion $y = f(x)$ soll im x-y-Koordinatensystem senkrecht oder waagrecht verschoben werden. Die Strecke der Verschiebung soll die Länge k mit $k \in \mathbb{R}$, $k \geq 0$ haben.

- Senkrechte Verschiebung

  $f(x) + k$ verschiebt f um k nach oben.

  $f(x) - k$ verschiebt f um k nach unten.

- Waagrechte Verschiebung

  $f(x - k)$ verschiebt f um k nach rechts.

  $f(x + k)$ verschiebt f um k nach links.

- Beispiele
- Streckung/Stauchung von Funktionen

  Die Kurve der Funktion $y = f(x)$ soll im x-y-Koordinatensystem senkrecht oder waagrecht gestreckt bzw. gestaucht werden.
- Senkrechte Streckung/Stauchung

  $k \cdot f(x)$ mit $k \in \mathbb{R}$, $k > 1$ streckt in y-Richtung auf das k-fache.

  $k \cdot f(x)$ mit $k \in \mathbb{R}$, $0 < k < 1$ staucht in y-Richtung auf das k-fache.
- Waagrechte Streckung/Stauchung

  $f(kx)$ mit $k \in \mathbb{R}$, $0 < k < 1$ streckt in x-Richtung auf das $(1/k)$-fache.

  $f(kx)$ mit $k \in \mathbb{R}$, $k > 1$ staucht in x-Richtung auf das $(1/k)$-fache.
- Beispiele
- Was geschieht bei $g(x) = -2,5 \cdot f(x)$ oder $h(x) = f(-0,5 \cdot x)$?
- Definition (umkehrbare Funktion)

  Eine Funktion f heißt ***umkehrbar***, wenn aus x_1, $x_2 \in D(f)$ mit $x_1 \neq x_2$ stets $f(x_1) \neq f(x_2)$ folgt.
- Skizze, graphische Interpretation.
- ***Umkehrfunktion*** graphisch: Spiegelung an der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten.
- ***Umkehrfunktion*** rechnerisch: $y = f(x)$ nach x auflösen (falls möglich); dann x und y vertauschen.
- Beispiele
- Anmerkung: Der Definitionsbereich der Umkehrfunktion zu f ist gleich dem Wertebereich von f.
- Satz

  Jede streng monotone Funktion ist umkehrbar.