

## Grundlagen der Differentialrechnung

### Die Ableitung

- Skizze: Funktionskurve gegeben; in einem Punkt der Kurve wird die Tangentensteigung gesucht; Sekantensteigung als Näherung (Differenzenquotient); Grenzübergang liefert Tangentensteigung (Differentialquotient).

- Definition

Die Funktion  $f$  sei auf dem Intervall  $I$  definiert, und es sei  $x_0 \in I$ . Man nennt

$$D(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad x_0 + h \in I \text{ und } h \neq 0$$

**Differenzenquotient.** Existiert der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} D(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

so heißt  $f$  **an der Stelle  $x_0$  differenzierbar**. Den Grenzwert nennt man **Ableitung** oder **Differentialquotient** von  $f$  an der Stelle  $x_0$ ; Bezeichnungen:

$$f'(x_0), \quad \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0}, \quad \left. \frac{d}{dx} f(x) \right|_{x=x_0}.$$

- Anmerkung: Ist  $x_0$  ein Randpunkt von  $I$ , haben wir einen rechts- bzw. linksseitigen Grenzwert und nennen  $f'(x_0)$  entsprechend rechts- bzw. linksseitige Ableitung von  $f$  an der Stelle  $x_0$ .

- Beispiele

- Definition

Die Funktion  $f$  heißt **auf dem Intervall  $I$  differenzierbar**, wenn  $f$  in jedem Punkt von  $I$  differenzierbar ist. Die Funktion

$$f'(x) \quad (x \in I)$$

heißt **Ableitung von  $f$  auf  $I$** .

- Anmerkung: Schreibt man  $y = f(x)$ , dann schreibt man für die Ableitung von  $f$  entsprechend  $y' = f'(x)$ . Hängt eine Funktion von der Zeit  $t$  ab, wird die Ableitung üblicherweise mit einem Punkt anstelle eines Strichs geschrieben, z.B. steht  $\dot{x}(t)$  für die Ableitung der Funktion  $x = x(t)$ .

- Beispiele: Wir berechnen die Ableitungen der Funktionen

1.  $f(x) = C$  mit  $C$  konstant,
2.  $f(x) = x$ ,
3.  $f(x) = x^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ),
4.  $f(x) = \sqrt{x}$  ( $x > 0$ ),
5.  $f(x) = \sin(x)$ ,
6.  $f(x) = \cos(x)$ ,
7.  $f(x) = \ln(x)$  ( $x > 0$ ).

- Definition

Die **zweite Ableitung** einer Funktion  $f$  erhält man durch Differenzieren der ersten Ableitung, d.h.  $f'' = (f')'$ . Schreibweisen:

$$f''(x), \quad \frac{d^2 f}{dx^2}, \quad \frac{d^2}{dx^2} f(x), \quad \frac{d}{dx} \left( \frac{df}{dx} \right).$$

Die **n-te Ableitung** entsteht durch  $n$ -maliges Differenzieren:

$$f^{(n)}(x), \quad \frac{d^n f}{dx^n}, \quad \frac{d^n}{dx^n} f(x).$$

- Beispiel

- Satz

Die Funktion  $f$  sei auf dem Intervall  $I$  definiert und an der Stelle  $x_0 \in I$  differenzierbar. Dann ist  $f$  stetig an  $x_0$ .

- Beweis