

Grundlagen der Differentialrechnung

Die Ableitung

- Skizze: Funktionskurve gegeben; in einem Punkt der Kurve wird die Tangentensteigung gesucht; Sekantensteigung als Näherung (Differenzenquotient); Grenzübergang liefert Tangentensteigung (Differentialquotient).

- Definition

Die Funktion f sei auf dem Intervall I definiert, und es sei $x_0 \in I$. Man nennt

$$D(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad x_0 + h \in I \text{ und } h \neq 0$$

Differenzenquotient. Existiert der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} D(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

so heißt f **an der Stelle x_0 differenzierbar**. Den Grenzwert nennt man **Ableitung** oder **Differentialquotient** von f an der Stelle x_0 ; Bezeichnungen:

$$f'(x_0), \quad \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0}, \quad \left. \frac{d}{dx} f(x) \right|_{x=x_0}.$$

- Anmerkung: Ist x_0 ein Randpunkt von I , haben wir einen rechts- bzw. linksseitigen Grenzwert und nennen $f'(x_0)$ entsprechend rechts- bzw. linksseitige Ableitung von f an der Stelle x_0 .

- Beispiele

- Definition

Die Funktion f heißt **auf dem Intervall I differenzierbar**, wenn f in jedem Punkt von I differenzierbar ist. Die Funktion

$$f'(x) \quad (x \in I)$$

heißt **Ableitung von f auf I** .

- Anmerkung: Schreibt man $y = f(x)$, dann schreibt man für die Ableitung von f entsprechend $y' = f'(x)$. Hängt eine Funktion von der Zeit t ab, wird die Ableitung üblicherweise mit einem Punkt anstelle eines Strichs geschrieben, z.B. steht $\dot{x}(t)$ für die Ableitung der Funktion $x = x(t)$.

- Beispiele: Wir berechnen die Ableitungen der Funktionen

1. $f(x) = C$ mit C konstant,
2. $f(x) = x$,
3. $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$),
4. $f(x) = \sqrt{x}$ ($x > 0$),
5. $f(x) = \sin(x)$,
6. $f(x) = \cos(x)$,
7. $f(x) = \ln(x)$ ($x > 0$).

- Definition

Die **zweite Ableitung** einer Funktion f erhält man durch Differenzieren der ersten Ableitung, d.h. $f'' = (f')'$. Schreibweisen:

$$f''(x), \quad \frac{d^2 f}{dx^2}, \quad \frac{d^2}{dx^2} f(x), \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right).$$

Die **n-te Ableitung** entsteht durch n -maliges Differenzieren:

$$f^{(n)}(x), \quad \frac{d^n f}{dx^n}, \quad \frac{d^n}{dx^n} f(x).$$

- Beispiel

- Satz

Die Funktion f sei auf dem Intervall I definiert und an der Stelle $x_0 \in I$ differenzierbar. Dann ist f stetig an x_0 .

- Beweis