

## Grundlagen der Differentialrechnung

### Kettenregel, Ableiten von Umkehrfunktionen

- **Problemstellung:** Ableitung einer Funktion der Gestalt  $g(f(x))$ , zum Beispiel  $g(f(x)) = \sin(x^2)$ . Hierbei ist  $g(z) = \sin(z)$  und  $z = f(x) = x^2$ . Wir nennen  $g$  die *äußere Funktion* und  $f$  die *innere Funktion*.

- **Satz (*Kettenregel*)**

Es seien  $f$  und  $g$  differenzierbar. (Genauer:  $z = f(x)$  sei an der Stelle  $x$  differenzierbar und  $y = g(z)$  an der dazugehörigen Stelle  $z = f(x)$ .)

Dann ist auch  $g(f(x))$  differenzierbar, und es gilt

$$\frac{d}{dx} g(f(x)) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

(ohne Bew.)

- **Anmerkung:**

1. Wir nennen  $g'$  die *äußere Ableitung* und  $f'$  die *innere Ableitung*.
2. Mit der Abkürzung  $z = f(x)$  kann man schreiben:

$$\frac{d}{dx} g(f(x)) = \left. \frac{d}{dz} g(z) \right|_{z=f(x)} \cdot \frac{d}{dx} f(x).$$

3. Mit der Abkürzung  $y = g(f(x))$  kann man die symbolische Regel

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

aufschreiben.

- **Beispiele**

- **Satz (Ableitung der Umkehrfunktion)**

Die Funktion  $f$  sei auf dem Intervall  $(a, b)$  differenzierbar mit  $f'(x) \neq 0$ . Dann existiert auf dem Bildbereich von  $(a, b)$  die Umkehrfunktion  $g$  zur Funktion  $f$  und ist dort differenzierbar mit

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

- Beweis
- Beispiele: Ableitungen von
  1.  $e$ -Funktion,
  2. Potenzfunktion mit beliebigem reellen Exponenten,
  3. Exponentialfunktion mit beliebiger Basis  $b > 0$ ,  $b \neq 1$ ,
  4. Logarithmusfunktion mit beliebiger Basis  $b > 0$ ,  $b \neq 1$ ,
  5. Arcusfunktionen.