

Anwendungen der Differentialrechnung

Geometrische Eigenschaften von Funktionskurven

- Die Ableitung einer Funktion f an der Stelle x_0 ist gleich der Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x_0 | f(x_0))$.

Im folgenden untersuchen wir mit Hilfe der Differentialrechnung weitere geometrische Eigenschaften von Funktionskurven.

- **Tangente** und **Normale**

Die Normale zur Kurve $y = f(x)$ an der Stelle x_0 ist die Gerade, die senkrecht auf der Tangente an f im Punkt $(x_0 | f(x_0))$ steht. Es gilt

$$\text{Normalensteigung} = -\frac{1}{\text{Tangentensteigung}}$$

(Skizze).

- Satz

Es sei f differenzierbar an der Stelle x_0 . Die **Tangente** an die Kurve $y = f(x)$ im Punkt $P = (x_0 | y_0)$ hat die Gleichung

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Für $f'(x_0) \neq 0$ wird die **Normale** durch

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

beschrieben.

- Beispiel
- **Wachstum** und **Krümmung**

$f'(x_0) > 0$	Die Kurve $y = f(x)$ <i>wächst</i> in der Umgebung von x_0 .
$f'(x_0) < 0$	$y = f(x)$ <i>fällt</i> in der Umgebung von x_0 .
$f''(x_0) > 0$	Die Tangentensteigung <i>wächst</i> in der Umgebung von x_0 ; die Kurve $y = f(x)$ hat eine <i>Linkskrümmung</i> in x_0 .
$f''(x_0) < 0$	<i>Rechtskrümmung</i> in x_0 .

- Skizze

- **Extremwerte**

Extremwerte sind Maxima (Hochpunkte) oder Minima (Tiefpunkte) einer Funktionskurve.

- Definition

Eine Funktion f besitzt an der Stelle $x_0 \in D(f)$ ein **lokales (relatives) Maximum**, wenn $f(x_0) \geq f(x)$ in einer Umgebung von x_0 gilt.

Entsprechend hat f für $f(x_0) \leq f(x)$ (in einer Umgebung von x_0) ein **lokales (relatives) Minimum** an x_0 .

Gilt die Ungleichung für alle $x \in D(f)$, spricht man von einem **globalen (absoluten) Maximum** bzw. **Minimum**.

- Skizze

- Satz

Hat die Funktion f an x_0 einen Extremwert und ist sie dort differenzierbar, so gilt $f'(x_0) = 0$.

- Skizze und anschauliche Begründung.

- Anmerkung: Die Umkehrung gilt nicht, d.h. die Bedingung $f'(x_0) = 0$ ist (bei einer differenzierbaren Funktion) für die Existenz eines Extremwerts notwendig aber nicht hinreichend.

- Beispiel

- Satz

Die Funktion f sei zweimal stetig differenzierbar in einer Umgebung von x_0 . Wenn gilt

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f''(x_0) \neq 0,$$

dann hat $y = f(x)$ an der Stelle x_0 einen Extremwert. Der Extremwert ist ein Maximum für $f''(x_0) < 0$. Er ist ein Minimum für $f''(x_0) > 0$.

- Skizze und anschauliche Begründung. Beispiel.

- **Wendepunkte** und **Sattelpunkte**

Anschaulich hat eine Funktion f an der Stelle $x_0 \in D(f)$ einen Wendepunkt, wenn sich der Drehsinn der Tangente ändert. Wendepunkte mit waagrechter Tangente heißen Sattelpunkte.

- Definition

Die Funktion f sei differenzierbar auf einer Umgebung von x_0 . Hat die Ableitung f' einen Extremwert an der Stelle x_0 , dann hat $y = f(x)$ dort einen **Wendepunkt**.

Dieser ist ein **Sattelpunkt**, wenn zusätzlich $f'(x_0) = 0$ gilt.

- Skizze

- Satz

Hat die Funktion f an x_0 einen Wendepunkt und ist sie dort zweimal differenzierbar, so gilt $f''(x_0) = 0$.

- Skizze und anschauliche Begründung.

- Anmerkung: Die Umkehrung gilt nicht, d.h. die Bedingung $f''(x_0) = 0$ ist (bei einer zweimal differenzierbaren Funktion) für die Existenz eines Wendepunktes notwendig aber nicht hinreichend.

- Beispiel

- Satz

Die Funktion f sei in einer Umgebung von x_0 dreimal stetig differenzierbar. Wenn gilt

$$f''(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f'''(x_0) \neq 0,$$

dann hat $y = f(x)$ einen Wendepunkt an x_0 .

- Skizze und anschauliche Begründung. Beispiel.

- Satz (Allgemeines Kriterium für **Extremwerte** und **Sattelpunkte**)

Die Funktion f sei n -mal stetig differenzierbar in einer Umgebung von x_0 , wobei $n > 1$ sei. Wenn $f^{(n)}(x_0)$ die erste nichtverschwindende Ableitung an der Stelle x_0 ist, also

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$$

und

$$f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

gilt, dann hat f an x_0 für

- gerades n einen Extremwert und für
- ungerades n einen Sattelpunkt.

Im Falle des Extremwerts liegt ein Maximum vor, falls $f^{(n)}(x_0) < 0$ ist, und ein Minimum, falls $f^{(n)}(x_0) > 0$ ist.

(ohne Bew.)