

Grundlagen der Integralrechnung

Integralbegriff, Integralberechnung mit Stammfunktionen

- Problem: Eine Funktion f ist gegeben; die Fläche zwischen der Kurve $y = f(x)$, der x -Achse und den Senkrechten bei $x = a$ und $x = b$ ist gesucht.
- Idee: Wir bilden eine Näherung mit Rechtecken.

Das Intervall $[a, b]$ wird durch

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

in n Teilintervalle zerlegt. Aus jedem Teilintervall wird ein beliebiger Wert ξ_i gewählt,

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \quad \text{mit} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Damit werden Rechtecke der Höhe $f(\xi_i)$ und der Breite $x_i - x_{i-1}$ gebildet, deren Fläche also gleich $f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$ ist. Die Summe der Rechteckflächen

$$F_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

ist eine Näherung für den gesuchten Flächeninhalt.

Je „feiner“ die Zerlegung ist, desto besser wird die Näherung. Bei dem betreffenden Grenzübergang muß zum einen die Anzahl der Zerlegungspunkte gegen Unendlich gehen (es werden immer mehr Rechtecke verwendet), zum anderen muß das maximale Δx_i gegen 0 gehen (es darf kein Rechteck mit fester endlicher Breite übrig bleiben). Wir bekommen einen sinnvollen Wert für den Flächeninhalt, falls ein Grenzwert existiert, und falls dieser unabhängig von den gewählten x_i und ξ_i ist.

- Definition

Existiert der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

bei jeder beliebigen Wahl der x_i und ξ_i (mit der Einschränkung, daß die Zerlegungen von $[a, b]$ so gewählt werden, daß $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) gilt), so wird er das **bestimmte Integral** der Funktion f in den Grenzen von a bis b genannt. Schreibweise:

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Die Funktion f heißt dann **integrierbar** auf $[a, b]$.

- Bezeichnungen: a nennt man die Unter- und b die Obergrenze. Die Funktion $f(x)$ heißt Integrand.

Es spielt keine Rolle, welcher Buchstabe für die Integrationsvariable verwendet wird, d.h. es gilt z.B.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du.$$

- Definition

Ist $a > b$, so setzen wir

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

- Satz

Ist die Funktion f stetig auf $[a, b]$, dann ist sie auf $[a, b]$ integrierbar.

(ohne Bew.)

- Anmerkung: Nachdem der Begriff des Integrals festgelegt ist, brauchen wir eine möglichst einfache Methode zur Berechnung des Integralwertes. Dafür wird ein Zusammenhang zwischen der Differential- und der Integralrechnung von entscheidender Bedeutung sein.

Im folgenden sei f eine auf $[a, b]$ integrierbare Funktion.

- Definition (Flächenfunktion)

Zu $x \in [a, b]$ definieren wir die **Flächenfunktion** F_a durch

$$F_a(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Skizze!

- Satz (**Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung**)

Es sei $x \in [a, b]$, und f sei an x stetig. Dann gilt:

$$F'_a(x) = f(x).$$

- Beweis

- Definition (Stammfunktion)

Gilt $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in [a, b]$, so heißt F **Stammfunktion** von f auf $[a, b]$.

- Satz

Sind F_1 und F_2 Stammfunktionen von f auf $[a, b]$, dann gilt:

$$F_1 = F_2 + \text{Konstante.}$$

- Beweis
- Satz (**Integralberechnung mit Stammfunktionen**)
Es sei F eine Stammfunktion von f auf $[a, b]$. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

- Beweis
- Anmerkung: Für $F(b) - F(a)$ werden die Abkürzungen $\left[F(x)\right]_a^b$ oder $F(x)\Big|_a^b$ verwendet.
- Beispiele
- Anmerkung: Die verschiedenen Stammfunktionen zu einer Funktion f unterscheiden sich lediglich durch konstante Summanden. Ist F eine spezielle Stammfunktion, schreibt man deshalb $F(x) + C$ als Darstellung einer beliebigen Stammfunktion; hierbei steht C für eine beliebige reelle Zahl.

Eine weitere Darstellung für eine beliebige Stammfunktion ist das **unbestimmte Integral**

$$\int f(x) dx,$$

das sich von dem bestimmten Integral dadurch unterscheidet, daß es keine Integrationsgrenzen hat. Man schreibt

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad \text{auf dem Intervall } I$$

und meint damit, daß

$$F'(x) = f(x) \quad \text{für } x \in I$$

gilt.

Die unbestimmte Integration ist die Umkehrung der Differentiation:

$$\frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x) \quad \text{und} \quad \int \frac{dF(x)}{dx} dx = F(x) + C$$

auf dem Intervall I .

- Beispiele