Integralrechnung

Aufgabe 1.
Berechnen Sie die Integrale mit Substitution.

a) $\displaystyle\int \sqrt{3+5x}\,dx$ b) $\displaystyle\int_1^2 (6-4t)^5\,dt$ c) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}\,dx$

d) $\displaystyle\int_0^\pi \sin(3t-\pi)\,dt$ e) $\displaystyle\int x^2 \mathrm{e}^{x^3-2}\,dx$ f) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3(t)\cdot\cos(t)\,dt$

Aufgabe 2.
Berechnen Sie die folgenden Integrale. Haben die Integranden eine spezielle Gestalt, durch die sich die Integration vereinfacht?

a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{\cos(\omega t)}{\sin(\omega t)}\,dt$ c) $\displaystyle\int \frac{1}{x\cdot\ln x}\,dx$

Aufgabe 3.
Skizzieren Sie die Funktion $y = 4 - x^2$ auf den Intervall von $x = -1$ bis $x = 2$. Das Integral

$$\int_{-1}^{2} (4-x^2)\,dx$$

soll näherungsweise mit der Trapezregel berechnet werden.

1. Schätzen Sie den Wert des Integrals mit Hilfe Ihrer Skizze ab.
2. Berechnen Sie eine Näherung mit drei Trapezen. Zerlegen Sie dafür das Intervall $[-1,2]$ in drei gleich lange Teile.
3. Berechnen Sie eine Näherung mit Hilfe von sechs Trapezen. Dazu soll das Intervall $[-1,2]$ in sechs gleich lange Teile zerlegt werden.

Aufgabe 4.
Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale. In welchen Fällen ergibt sich ein endlicher Wert? Wie groß ist er?

a) $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\,dt$ b) $\displaystyle\int_0^5 \frac{1}{x^2}\,dx$ c) $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{4-x}}\,dx$ d) $\displaystyle\int_9^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

Aufgabe 5.
Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen

1. der Kurve von $f(x) = 4 - x^2$ und der x-Achse zwischen den beiden Schnittpunkten von Kurve und Achse;

2. den beiden Kurven von $f(x) = x^2 + 4x + 5$ und $g(x) = x^3$ von $x = -2$ bis $x = 0$.