Vektoren

Grundbegriffe, Schreibweisen, elementare Rechenregeln

- Physikalische Größen bestehen aus

  1. Maßzahl und Einheit; Bezeichnung: Skalar, skalare Größe (z.B. Masse, Temperatur, Energie);
  2. Maßzahl, Richtung und Einheit; Bezeichnung: Vektor, vektorielle Größe (z.B. Kraft, Geschwindigkeit, Feldstärke).

- Definition (geometrisch)

  Es seien P und Q zwei Punkte im Raum. Die gerichtete Strecke von P nach Q nennt man einen ***Vektor***, Schreibweise: $\overrightarrow{PQ}$. Dabei heißt P Anfangs- und Q Endpunkt.

- Definition (geometrisch)

  Zwei Vektoren heißen ***gleich***, wenn sie durch Parallelverschiebung ineinander überführbar sind.

- Skizze: Die Längen und Richtungen der Vektorpfeile stimmen überein.

- Anmerkung: Spielt der Anfangspunkt eine Rolle, muß eine Zusatzinformation gegeben werden, z.B. „der Kraftvektor $\vec{F}$ greift im Punkt P an“.

  Durch unsere Festlegung der Gleichheit wird es möglich, Vektoren auf eine einfache Art zahlenmäßig zu beschreiben: Wir gehen davon aus, daß die Punkte des Raums durch ein kartesisches Koordinatensystem dargestellt werden. Ein gegebener Vektor $\vec{a}$ wird dann parallel verschoben, so daß sein Anfangspunkt im Ursprung des kartesischen Koordinatensystems zu liegen kommt. Die Koordinaten des Endpunkts von $\vec{a}$ charakterisieren dann $\vec{a}$ vollständig.

  Wir bezeichnen die Koordinaten der Vektorspitze von $\vec{a}$ durch a_x und a_y, wenn wir in der Ebene arbeiten. Im Raum kommt noch a_z hinzu. Liegt der Vektor in der Ebene, wird er also durch das Zahlenpaar (a_x, a_y) vollständig beschrieben. Im Raum stellt das Tripel (a_x, a_y, a_z) den Vektor eindeutig dar. Wir schreiben: $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$.

  Für $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ und $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ gilt damit $\vec{a} = \vec{b}$ genau dann, wenn $a_x = b_x$, $a_y = b_y$ und $a_z = b_z$ ist.

- Bezeichnungen (Koordinatendarstellung von Vektoren)

  Die Darstellung von $\vec{a}$ als $\vec{a} = (a_x, a_y)$ heißt ***Zeilenvektor***, die Darstellung $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ ***Spaltenvektor***, entsprechend im Dreidimensionalen.

  Die reellen Zahlen a_x, a_y und a_z heißen die ***Koordinaten*** (oder die *skalaren Komponenten*) des Vektors.

- Anmerkung: Das kartesische Koordinatensystem, das wir im dreidimensionalen Raum verwenden, soll ein ***Rechtssystem*** sein, d.h. die z-Achse zeigt in die Richtung, in die sich eine Rechtsschraube bewegt, wenn sie so herum gedreht wird, wie bei der Drehung der positiven x-Achse auf kürzestem Weg in die positive y-Achse.

- Bezeichnung: Zu einem Punkt P der Ebene oder des Raumes heißt der Vektor vom Ursprung (Nullpunkt) des Koordinatensystems nach P der ***Ortsvektor*** von P, geschrieben $\overrightarrow{0P}$.

- Anmerkung: Das *Parallelogramm der Kräfte* legt nahe, daß für die Addition zweier Vektoren $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ und $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ die Festlegung

  $$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$$

  sinnvoll ist.

  Da für $\vec{F} + \vec{F}$ die Schreibweise $2 \cdot \vec{F}$ vernünftig ist, bietet es sich ferner an, für die Multiplikation einer Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ mit einem Vektor $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ die Vereinbarung

  $$\lambda \cdot \vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$

  zu treffen.

  Arbeitet man im Zweidimensionalen, läßt man die dritte Koordinate weg.

- Skizzen (auch zur Summe mehrerer Vektoren: Vektorpolygon).

- Anmerkung: Statt $\vec{a} + (-1) \cdot \vec{b}$ schreibt man $\vec{a} - \vec{b}$ und hat damit auch die Subtraktion von Vektoren eingeführt.

- Anmerkung: Vom Vektor $\vec{a} = (a_x, a_y)$ in der Ebenen und dem Vektor $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ im Raum verallgemeinern wir auf den Vektor $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ im n-dimensionalen Raum.

  Dabei definieren wir den allgemeinen Vektorbegriff so, daß die zwei- und dreidimensionalen Spezialfälle unseren bisherigen Veranschaulichungen entsprechen.

- Definition (n-dimensionaler Vektorraum)

  Die Menge der reellen n-Tupel

  $$\mathbb{R}^n = \{\, \vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \text{ mit } a_1,\, \ldots,\, a_n \in \mathbb{R}\,\}$$

  mit den Operationen

  $$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n),$$

  $$\lambda\vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n) \qquad (\text{mit } \lambda \in \mathbb{R}),$$

  heißt der **n-*dimensionale Vektorraum*** über $\mathbb{R}$.

  Die Elemente des $\mathbb{R}^n$ heißen ***Vektoren***.

  Zum n-dimensionalen Vektor $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ heißen die a_i $(i = 1, \ldots, n)$ die ***Koordinaten*** (*skalaren Komponenten*) des Vektors.

  Wir schreiben $\vec{a} - \vec{b}$ für $\vec{a} + (-1) \cdot \vec{b}$.

- Anmerkung:

  1. Speziell ist $0 \cdot \vec{a} = (0, 0, \ldots, 0)$, der sogenannte ***Nullvektor***, Schreibweise: $\vec{0}$. Der Nullvektor hat als einziger Vektor keine Richtung.
  2. Der Vektor $-\vec{a}$ heißt „der zu $\vec{a}$ entgegengesetzt gleiche (inverse) Vektor".
  3. Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ heißen zueinander parallel, $\vec{a} \upuparrows \vec{b}$, falls $\vec{a} = \lambda\vec{b}$ mit $\lambda > 0$ ist, sie heißen antiparallel, $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, falls $\vec{a} = \lambda\vec{b}$ mit $\lambda < 0$ ist.

- Anmerkung: Die Spezialfälle $n = 2$ bzw. $n = 3$ können wir uns durch Pfeile in der Ebene bzw. im Raum veranschaulichen.

- Beispiele

- Satz (Rechenregeln)

  Es seien $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$ und λ, $\mu \in \mathbb{R}$. Dann gilt

  1. $\vec{a} + \vec{b} \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda\vec{a} \in \mathbb{R}^n,$
  2. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (Kommutativität),
  3. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ (Assoziativität),
  4. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a} = \vec{0} + \vec{a}$ (Existenz eines neutralen Elements),
  5. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ (Existenz inverser Elemente),
  6. $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ (Distributivität),
  7. $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ (Distributivität),
  8. $(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a})$,
  9. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

- Beweis: Folgt sofort aus den Definitionen von $\vec{a} + \vec{b}$ und $\lambda\vec{a}$ sowie den Rechenregeln in $\mathbb{R}$.

- Definition (Betrag)

  Es sei $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Die reelle Zahl

  $$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$

  heißt ***Betrag*** (Länge) von $\vec{a}$.

- Anmerkung: Im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ entspricht das der Länge des Vektorpfeils, berechnet nach dem Satz des Pythagoras.

- Satz (Eigenschaften des Betrags)

  Es gilt

  1. $|\vec{a}| \geq 0, \qquad |\vec{a}| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$,
  2. $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$,
  3. $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}| \qquad$ (Dreiecksungleichung).

- Anmerkung: Die anschauliche Formulierung „Länge und Richtung legen einen Vektor fest“ heißt in Formeln ausgedrückt:

  $$\vec{a} = \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad |\vec{a}| = |\vec{b}| \text{ und } \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}.$$

  Ferner gilt

  $$\vec{a} = -\vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad |\vec{a}| = |\vec{b}| \text{ und } \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}.$$

- Beispiele