

# Funktionen

## Einige elementare Funktionen

- Wir betrachten einige *elementare Funktionen*:

Polynome, Gebrochenrationale Funktionen, Potenz- und Wurzelfunktionen, Exponentialfunktionen, Logarithmusfunktionen sowie Winkelfunktionen.

- Definition

Eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n,$$

wobei  $n \in \mathbb{N}$  ist, heißt **Polynom  $n$ -ten Grades** oder **ganzrationale Funktion**. Die  $a_0, \dots, a_n$  ( $a_n \neq 0$ ) heißen **Koeffizienten**.

- Anmerkung: Spezialfälle sind die konstante, lineare, quadratische und kubische Funktion, sowie allgemein die Potenzfunktion  $y = x^n$  mit natürlichem Exponenten  $n$ .

- Satz

Es sei  $f(x)$  ein Polynom vom Grade  $n$  und  $x_1$  eine Nullstelle von  $f$ , d.h.  $f(x_1) = 0$ . Dann ist

$$f(x) = (x - x_1) \cdot f_1(x)$$

mit dem 1. reduzierten Polynom  $f_1$ , das den Grad  $n - 1$  hat, und dem Linearfaktor  $(x - x_1)$ .

- Anmerkung: Man berechnet  $f_1$  durch eine Polynomdivision, bei der  $f$  durch  $(x - x_1)$  geteilt wird.

- Satz

Ein Polynom  $n$ -ten Grades besitzt höchstens  $n$  reelle Nullstellen.

Hat es genau  $n$  reelle Nullstellen  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , so gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \\ &= a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n). \end{aligned}$$

- Lineare Funktionen

Der Graph einer linearen Funktion ist eine **Gerade**. Ist eine lineare Funktion in der Form  $y = mx + b$  gegeben, so ist  $m$  die Steigung der Geraden und  $b$  der Abschnitt auf der  $y$ -Achse. (Skizze zeichnen!)

Wird eine Gerade durch ihre Steigung  $m$  und durch einen Punkt  $P_1(x_1|y_1)$  auf der Geraden definiert, erhält man die zugehörige Funktion wie folgt: Es sei  $P(x|y)$  ein beliebiger Punkt ungleich  $P_1$  auf der Geraden. Die Steigung ist dann die Differenz der  $y$ -Werte geteilt durch die Differenz der  $x$ -Werte

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}.$$

(Skizze zeichnen!)

Ist eine Gerade durch zwei Punkte  $P_1(x_1|y_1)$  und  $P_2(x_2|y_2)$  gegeben, ist die Steigung zwischen  $P_1$  und  $P_2$  gleich der Steigung zwischen  $P_1$  und  $P$ , also

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

(Skizze zeichnen!)

- Quadratische Funktionen

Der Graph einer quadratischen Funktion  $y = ax^2 + bx + c$  ist eine **Parabel**. Für  $a > 0$  ist die Parabel nach oben geöffnet, für  $a < 0$  nach unten.

Hat die Parabel Schnittpunkte mit der waagrechten Achse, berechnet man die Koordinaten durch Lösen der quadratischen Gleichung  $ax^2 + bx + c = 0$ . Wenn die Parabel keine Schnittpunkte mit der waagrechten Achse hat, erhält man beim Lösen der quadratischen Gleichung eine Wurzel aus einer negativen Zahl.

- Definition

Der Quotient zweier Polynome

$$r(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_{m-1}x^{m-1} + b_mx^m}$$

heißt **gebrochenrationale Funktion**. Der Definitionsbereich ist

$$D(r) = \{x \in \mathbb{R} \mid b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m \neq 0\}.$$

Für  $m > n$  ist die Funktion *echt* gebrochenrational, für  $m \leq n$  *unecht* gebrochenrational.

- Anmerkung: Haben das Zähler- und das Nennerpolynom eine gemeinsame Nullstelle  $x_0$ , so kann man den Linearfaktor  $(x - x_0)$  kürzen. Die Definitionslücke an der Stelle  $x_0$  wird dadurch behoben.

Hat man so weit wie möglich gekürzt, haben Zähler- und Nennerpolynom keine gemeinsame Nullstelle mehr. Die Nullstellen des Zählerpolynoms sind dann die Nullstellen der gebrochenrationalen Funktion. Die Nullstellen des Nennerpolynoms sind Polstellen (Unendlichkeitsstellen).

- Anmerkung: Ist  $r(x)$  unecht gebrochenrational, kann man die Funktion durch Polynomdivision — bei der man den Zähler durch den Nenner teilt — in

$$r(x) = p(x) + g(x)$$

zerlegen, wobei  $p$  ein Polynom und  $g$  eine echt gebrochenrationale Funktion ist. Für wachsendes  $x$  werden die Werte von  $g(x)$  immer kleiner, unabhängig vom Vorzeichen von  $x$ , so daß sich die Kurve von  $r$  immer dichter an die Kurve von  $p$  anschmiegt. Man nennt  $p$  deshalb die Asymptote von  $r$  im Unendlichen.

- Definition

Funktionen  $f(x) = x^a$  mit konstantem Exponenten  $a$  und variabler Basis  $x$  heißen **Potenzfunktionen**. Im allgemeinen Fall, also für beliebige reelle Exponenten  $a$ , sind sie für positive  $x$  definiert.

- Anmerkung: In wichtigen Fällen erweitert sich der Definitionsbereich. Dazu seien nur Zahlen aus bestimmten Teilmengen von  $\mathbb{R}$  für die Exponenten zugelassen.

- Natürliche Zahlen:  $f(x) = x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Definitionsbereich ist  $D(f) = \mathbb{R}$ .
- Negative ganze Zahlen:  $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Definitionsbereich ist  $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .
- Ist  $n$  gerade, sind die Funktionen  $y = x^n$  für  $x \geq 0$  streng monoton, also auf dem Intervall  $[0, \infty)$  umkehrbar. Die Umkehrfunktionen sind die **Wurzelfunktionen**  $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$  mit  $n \in \mathbb{N}$  und  $n$  gerade. Definitionsbereich ist  $D(f) = [0, \infty)$ .
- Ist  $n$  ungerade, sind die Funktionen  $y = x^n$  auf  $\mathbb{R}$  streng monoton und somit umkehrbar. Umkehrfunktionen sind die **Wurzelfunktionen**  $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$  mit  $n \in \mathbb{N}$  und  $n$  ungerade. Definitionsbereich ist  $D(f) = \mathbb{R}$ .

- Anmerkung: Man beachte die Rechenregeln für Potenzen. Für  $x, x_1, x_2 > 0$  und  $a, b \in \mathbb{R}$  ist

$$\begin{aligned} x^a \cdot x^b &= x^{a+b} \\ \frac{x^a}{x^b} &= x^{a-b} \\ (x^a)^b &= x^{ab} = (x^b)^a \\ x_1^a \cdot x_2^a &= (x_1 \cdot x_2)^a \end{aligned}$$

Speziell mit  $m, n \in \mathbb{N}$  gilt für Wurzeln

$$\begin{aligned} x^{m/n} &= \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m \\ \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2} &= \sqrt[n]{x_1} \cdot \sqrt[n]{x_2} \\ \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} &= \sqrt[mn]{x} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} \end{aligned}$$

- Definition

Funktionen vom Typ  $f(x) = b^x$  mit konstanter Basis  $b > 0$  und  $b \neq 1$  heißen **Exponentialfunktionen**. Der Exponent  $x$  ist variabel und darf beliebige reelle Werte annehmen, d.h. der Definitionsbereich ist  $D(f) = \mathbb{R}$ .

Von besonderer Bedeutung ist die Exponentialfunktion mit der Basis  $e$ , die **e-Funktion**

$$y = e^x = \exp(x).$$

Näherungsweise ist  $e \approx 2,71$ .

- Anmerkung: Man beachte, daß speziell die Rechenregeln  $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$  und  $e^a/e^b = e^{a-b}$  sowie  $(e^a)^b = e^{ab}$  gelten.

- Definition

Es sei  $b > 0$  und  $b \neq 1$ . Die Umkehrfunktion zu  $y = b^x$  heißt **Logarithmus zur Basis  $b$** , geschrieben  $f(x) = \log_b x$ . Der Definitionsbereich ist die Menge der positiven reellen Zahlen,  $D(f) = (0, \infty)$ .

Die Umkehrfunktion zur  $e$ -Funktion wird als **natürlicher Logarithmus** bezeichnet und  $f(x) = \log_e x = \ln x$  geschrieben.

- Anmerkung: Für Logarithmen gelten die folgenden Rechenregeln, wobei  $b > 0$  und  $b \neq 1$  sowie  $x, x_1, x_2 > 0$  und  $r \in \mathbb{R}$  sei.

$$\begin{aligned} \log_b(x_1 \cdot x_2) &= \log_b x_1 + \log_b x_2 \\ \log_b\left(\frac{x_1}{x_2}\right) &= \log_b x_1 - \log_b x_2 \\ \log_b(x^r) &= r \log_b x \end{aligned}$$

Ferner ist  $\log_b 1 = 0$  und  $\log_b b = 1$  sowie  $b^{\log_b x} = x$  und  $\log_b b^x = x$ .

- Anmerkung: Besonders oft wird die Beziehung

$$x^r = e^{\ln(x^r)} = e^{r \cdot \ln x}$$

verwendet, die für  $x > 0$  und  $r \in \mathbb{R}$  gilt.

- Definition

Wir definieren die **Winkelfunktionen** (auch **trigonometrische Funktionen** genannt) Sinus, Cosinus und Tangens geometrisch am Einheitskreis.

- Skizze

- Gradmaß und Bogenmaß.

- Anmerkung: Es ist  $\sin(30^\circ) = 1/2$  sowie  $\sin(45^\circ) = \sqrt{2}/2$  und  $\sin(60^\circ) = \sqrt{3}/2$ . Durch Symmetrieüberlegungen kann man dies auf andere Winkel und auf die Cosinusfunktion übertragen.

- Satz

Für beliebige  $x \in \mathbb{R}$  gilt

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $\cos x \neq 0$  gilt

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

- Satz (Eigenschaften der Winkelfunktionen)

1. Periodizität

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ (} 2\pi\text{-periodisch)}$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ (} 2\pi\text{-periodisch)}$$

$$\tan(x + \pi) = \tan x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \setminus \{x \mid \cos x = 0\} \text{ (} \pi\text{-periodisch)}$$

2. Symmetrie

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\tan(-x) = -\tan x$$

3. Nullstellen

$$\sin(x_n) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_n = n\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$$\cos(x_n) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_n = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$$\tan(x_n) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin(x_n) = 0$$

4. Pole

$$\tan(x_n) = \pm\infty \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x_n) = 0$$