Grundlagen der Differentialrechnung

Die Ableitung

- Skizze: Funktionskurve gegeben; in einem Punkt der Kurve wird die Tangentensteigung gesucht; Sekantensteigung als Näherung (Differenzenquotient); Grenzübergang liefert Tangentensteigung (Differentialquotient).

- Definition

  Die Funktion f sei auf dem Intervall I definiert, und es sei $x_0 \in I$. Man nennt

  $$D(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad x_0 + h \in I \text{ und } h \neq 0$$

  Differenzenquotient. Existiert der Grenzwert

  $$\lim_{h \to 0} D(h) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

  so heißt f ***an der Stelle*** $\mathbf{x_0}$ ***differenzierbar***. Den Grenzwert nennt man ***Ableitung*** oder ***Differentialquotient*** von f an der Stelle x_0; Bezeichnungen:

  $$f'(x_0), \qquad \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}, \qquad \left.\frac{d}{dx}\, f(x)\right|_{x=x_0}.$$

- Anmerkung: Ist x_0 ein Randpunkt von I, haben wir einen rechts- bzw. linksseitigen Grenzwert und nennen $f'(x_0)$ entsprechend rechts- bzw. linksseitige Ableitung von f an der Stelle x_0.

- Beispiele

- Definition

  Die Funktion f heißt ***auf dem Intervall*** I ***differenzierbar***, wenn f in jedem Punkt von I differenzierbar ist. Die Funktion

  $$f'(x) \qquad (x \in I)$$

  heißt ***Ableitung von*** f ***auf*** I.

- Anmerkung: Schreibt man $y = f(x)$, dann schreibt man für die Ableitung von f entsprechend $y' = f'(x)$. Hängt eine Funktion von der Zeit t ab, wird die Ableitung üblicherweise mit einem Punkt anstelle eines Strichs geschrieben, z.B. steht $\dot{x}(t)$ für die Ableitung der Funktion $x = x(t)$.

- Beispiele: Wir berechnen die Ableitungen der Funktionen

  1. $f(x) = C$ mit C konstant,
  2. $f(x) = x$,
  3. $f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{N})$,
  4. $f(x) = \sqrt{x} \quad (x > 0)$,
  5. $f(x) = \sin(x)$,
  6. $f(x) = \cos(x)$,
  7. $f(x) = \ln(x) \quad (x > 0)$.

- Definition

  Die ***zweite Ableitung*** einer Funktion f erhält man durch Differenzieren der ersten Ableitung, d.h. $f'' = (f')'$. Schreibweisen:

  $$f''(x), \qquad \frac{d^2 f}{dx^2}, \qquad \frac{d^2}{dx^2} f(x), \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right).$$

  Die **n-*te Ableitung*** entsteht durch n-maliges Differenzieren:

  $$f^{(n)}(x), \qquad \frac{d^n f}{dx^n}, \qquad \frac{d^n}{dx^n} f(x).$$

- Beispiel

- Satz

  Die Funktion f sei auf dem Intervall I definiert und an der Stelle $x_0 \in I$ differenzierbar. Dann ist f stetig an x_0.

- Beweis