Anwendungen der Differentialrechnung

Regel von de l'Hospital, Newton-Verfahren

- ***Die Regel von de l'Hospital***.

- Problemstellung: Die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{e^x}$$

sind gesucht. Grenzübergänge in Zähler und Nenner führen bei den Beispielen auf unbestimmte Ausdrücke vom Typ „$\frac{0}{0}$“ bzw. „$\frac{\infty}{\infty}$“.

- Satz (***Regel von de l'Hospital***)

Die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ seien in einer Umgebung von $x = a$ differenzierbar (nicht unbedingt in a selbst). Ferner sei $g'(x) \neq 0$ in einer Umgebung von $x = a$.

Für Grenzwerte $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ mit $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ oder mit $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$ gilt dann

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

(ohne Bew.)

- Anmerkung: Hierbei kann $a \in \mathbb{R}$, $a = +\infty$ oder $a = -\infty$ sein.

- Beispiele

- Anmerkung: Bei unbestimmten Ausdrücken vom Typ „$0 \cdot \infty$“, „$\infty - \infty$“, „0^0“, „1^∞“ und „∞^0“ ist eine Rückführung auf „$\frac{0}{0}$“ oder „$\frac{\infty}{\infty}$“ möglich.

- Beispiele

- ***Das Newton-Verfahren***.

- Problemstellung: Gesucht sind die Lösungen einer Gleichung

$$f(x) = g(x).$$

Gleichwertig dazu ist die Bestimmung der Nullstellen der Funktion

$$y = f(x) - g(x).$$

In vielen Fällen ist es nicht möglich, die Lösungen der Gleichung bzw. die Nullstellen der Funktion mit Hilfe algebraischer Umformungen zu berechnen.

- Beispiel: Die Kurven $y = e^x$ und $y = -x$ schneiden sich. Also muß die Gleichung $e^x = -x$ eine Lösung haben. Gleichwertig formuliert heißt das, die Funktion $y = x + e^x$ muß bei demselben x-Wert eine Nullstelle besitzen.

- Skizze

- Ausweg: Die Aufgabenstellung wird nicht exakt gelöst; statt dessen sucht man ***Näherungen***. Zum Beispiel kann man das Vorzeichen der Funktion $y = x+e^x$ für verschiedene x-Werte bestimmen und durch Intervallhalbierung die Nullstelle immer mehr eingrenzen. Solche Methoden heißen ***numerische Verfahren*** oder ***numerische Algorithmen***. Für die Nullstellensuche ist das ***Newton-Verfahren*** sehr populär.

- Die Idee des Newton-Verfahrens.

  Zur Funktion $f(x)$ ist die Nullstelle x^* gesucht (näherungsweise). Man wählt einen Startwert x_0 möglichst dicht bei x^* (abgeschätzt). An der Stelle x_0 wird die Funktion f linearisiert, indem die Tangente an die Funktionskurve gelegt und dann als Ersatz für f verwendet wird. Der Schnittpunkt x_1 der Tangente mit der x-Achse ist leicht zu berechnen und wird als Verbesserung von x_0 genommen. Dann geht es wieder von vorne los: an der Stelle x_1 wird die Tangente an f gelegt u.s.w.

  Also werden die Näherungen x_0, x_1, x_2, ... schrittweise (iterativ) verbessert. Man spricht von einem ***Iterationsverfahren***. Für die Berechnung der x_n kann man eine Formel herleiten.

- Die ***Iterationsvorschrift*** des ***Newton-Verfahrens***:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

- Skizze und Herleitung.

- Beispiel: $f(x) = x + e^x$.

n	x_n	$f(x_n)$
0	−0.5000000000000000000000000	0.1065306597126334236037995
1	−0.5663110031972181530416491	0.0013045098060201101874254
2	−0.5671431650348622127865121	0.0000001964804717228820906
3	−0.5671432904097810286995766	0.0000000000000044574262753
4	−0.5671432904097838729999687	0.0000000000000000000000000

- Anmerkung: Das Newton-Verfahren muß nicht konvergieren. Selbst wenn es konvergiert, kann es einen falschen Wert liefern. Beim Arbeiten mit numerischen Verfahren ist Vorsicht geboten!