

Grundlagen der Integralrechnung

Numerische Integration

- Problemstellung: Der Wert des bestimmten Integrals

$$\int_a^b f(x) dx$$

kann in vielen Fällen nicht mit einer Stammfunktion F gemäß

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b$$

berechnet werden, weil F nicht mit elementaren Funktionen darstellbar ist, oder weil die Rechnung zu aufwendig wird. Anstelle des exakten Integralwertes bestimmt man dann eine **Näherung** und spricht von **numerischer Integration**.

Unverzichtbar sind Näherungsverfahren bei der Berechnung von Integralen $\int_a^b f(x) dx$, deren Integrand $f(x)$ nicht formelmäßig sondern durch tabellierte Werte gegeben ist. Solche Tabellenwerte bekommt man in der Praxis beispielsweise durch Messungen der Funktion f .

- Beispiele
- Rechteckregel

Anschaulich ist der Wert des Integrals $\int_a^b f(x) dx$ ein Flächeninhalt. Die einfachste Näherung für die betreffende Fläche ist ein Rechteck mit der Breite $b - a$ und einer möglichst „passenden“ Höhe, z.B. $f(a)$ oder $f(b)$. Dessen Flächeninhalt ist dann

$$R = (b - a)f(a) \quad \text{oder} \quad R = (b - a)f(b).$$

- Trapezregel

Eine bessere Näherung als mit der Höhe $f(a)$ oder $f(b)$ wird man in den meisten Fällen mit einer „mittlere Höhe“ $(f(a) + f(b))/2$ erhalten. Durch

$$T = (b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

bekommt man aber den Flächeninhalt eines Trapezes und nennt diese Näherungsformel daher **Trapezregel**.

Geometrisch betrachtet wird bei der Trapezregel die Kurve der Funktion $f(x)$ von $x = a$ bis $x = b$ durch eine Sehne ersetzt und die Fläche zwischen dieser Sehne und der x -Achse berechnet.

- Summierte Regeln

Genauere Ergebnisse erzielt man, wenn man das Integrationsintervall $[a, b]$ aufteilt, und die Näherungsregel auf jedem Teilintervall einzeln anwendet. Wird $[a, b]$ in n gleich große Teilintervalle der Breite

$$h = \frac{b - a}{n}$$

zerlegt, und werden die Teilpunkte durch

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + h, \quad x_2 = a + 2h, \quad \dots, \quad x_n = a + nh = b$$

bezeichnet, dann ist

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \left(\text{Näherung auf dem Intervall } [x_{i-1}, x_i] \right).$$

- Summierte Rechteckregel

Durch mehrfache Anwendung der Rechteckregel bekommen wir

$$\int_a^b f(x) dx \approx R(n),$$

und $R(n)$ ist die **summierte Rechteckregel**

$$\begin{aligned} R(n) &= \sum_{i=1}^n h f(x_i) = h \sum_{i=1}^n f(x_i) \\ &= \frac{b - a}{n} (f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)). \end{aligned}$$

- Summierte Trapezregel

Ausgehend von der Trapezregel ist

$$\int_a^b f(x) dx \approx T(n)$$

mit der **summierten Trapezregel**

$$\begin{aligned} T(n) &= \sum_{i=1}^n h \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} = h \sum_{i=1}^n \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \\ &= \frac{b - a}{n} \left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2} \right). \end{aligned}$$

- Beispiele

- Kepler-Regel

Bei der Rechteckregel wird anstelle der Funktionskurve von f ein waagrechtes Geradenstück genommen, bei der Trapezregel hingegen ein Geradenstück mit „passender“ Steigung.

Also wird bei der Rechteckregel $p(x) = a_0$ und bei der Trapezregel $p(x) = a_0 + a_1x$ als Näherungsfunktion für $f(x)$ verwendet.

Wie kann man nun Näherungskurven bekommen, die sich noch besser an f anpassen, so daß die Flächen unter den Näherungskurven noch besser dem Wert des Integrals über f entsprechen?

Naheliegender ist der Übergang zu $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, also die Verwendung einer Parabel anstelle einer Geraden.

Eine Parabel ist durch drei Punkte festgelegt. Wir wählen eine Parabel so, daß sie an den Stellen $x = a$, $x = b$ und in der Mitte des Intervalls bei $x = (a+b)/2$ mit der Funktion f übereinstimmt. Man kann zeigen, daß der Flächeninhalt S zwischen dem Parabelbogen und der x -Achse von $x = a$ bis $x = b$ dann gleich

$$S = (b - a) \frac{f(a) + 4f((a + b)/2) + f(b)}{6}$$

ist, und nennt diese Formel **Kepler-Regel**.

- Skizze

- Anmerkung: In der Trapezregel wird der Mittelwert zweier Funktionswerte gebildet. Entsprechend kann man den Bruch in der Kepler-Regel als gewichteten Mittelwert interpretieren.

- Summierte Kepler-Regel: Simpsonregel

Wird die Kepler-Regel summiert, bekommt man die Integralnäherung

$$\int_a^b f(x) dx \approx S(n),$$

wobei $S(n)$ als **Simpson-Regel** bezeichnet wird. Es ist

$$\begin{aligned} S(n) &= \sum_{i=1}^n h \frac{f(x_{i-1}) + 4f((x_{i-1} + x_i)/2) + f(x_i)}{6} \\ &= h \sum_{i=1}^n \frac{f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-1} + h/2) + f(x_i)}{6} \\ &= \frac{b-a}{6n} (f(x_0) + 4f(x_0 + h/2) + 2f(x_1) + \dots + f(x_n)) . \end{aligned}$$

- Beispiele