

Anwendungen der Integralrechnung

Rotationskörper

- ***Volumen und Mantelfläche von Rotationskörpern***

- Problemstellung: Durch die Rotation eines Kurvenstücks um die x -Achse entsteht ein Rotationskörper. Berechnet werden soll sein Volumen und seine Mantelfläche.

- Beispiele (Skizzen).

- Satz

Auf dem Intervall $[a, b]$ sei die stetige Funktion $y = f(x)$ gegeben. Der Rotationskörper, der durch die Rotation der Funktionskurve um die x -Achse entsteht, hat das Volumen

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

- Beweis

- Satz

Auf dem Intervall $[a, b]$ sei die stetig differenzierbare Funktion $y = f(x)$ gegeben. Der Rotationskörper, der durch die Rotation der Funktionskurve um die x -Achse entsteht, hat die Mantelfläche

$$M = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

- Beweis

- Anmerkung: Entsprechende Formeln gelten für Rotationskörper, die durch die Rotation eines Kurvenstücks um die y -Achse entstehen.

Hier stellt man die Kurve nicht durch $y = f(x)$ sondern durch $x = g(y)$ dar. Die Kurve soll zwischen $y = c$ und $y = d$ um die y -Achse rotieren, d.h. es soll $c \leq y \leq d$ gelten.

Damit ist die Situation völlig analog zur Rotation um die x -Achse: dreht man das Koordinatensystem um die Winkelhalbierende des 1. und 3. Quadranten, so sieht man, daß man eigentlich nur eine Umbenennung der Achsen hat. Die

Formeln und auch die Voraussetzungen an die Funktion ergeben sich einfach durch Vertauschung von x und y in den obigen Ergebnissen.

Das Volumen des Rotationskörpers bei Rotation um die y -Achse ist

$$V = \pi \int_c^d x^2 dy = \pi \int_c^d (g(y))^2 dy,$$

wobei die Funktion $x = g(y)$ für $c \leq y \leq d$ stetig sein soll.

Die Mantelfläche des Rotationskörpers bei Rotation um die y -Achse ist

$$M = 2\pi \int_c^d x \sqrt{1 + (x')^2} dy = 2\pi \int_c^d g(y) \sqrt{1 + (g'(y))^2} dy,$$

wobei die Funktion $x = g(y)$ für $c \leq y \leq d$ als stetig differenzierbar vorausgesetzt wird.

- Beispiele