Partielle Integration, Substitution, uneigentliche Integrale

Aufgabe 1.
Berechnen Sie die Integrale mit partieller Integration.

a) $\displaystyle\int_0^\pi x\cos(x)\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^\pi x^2\sin(x)\,dx$ c) $\displaystyle\int x^2\ln(x)\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$ e) $\displaystyle\int x\mathrm{e}^{-x}\,dx$ f) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-t}\cos(t)\,dt$

Aufgabe 2.
Berechnen Sie die Integrale mit Substitution.

a) $\displaystyle\int \sqrt{3+5x}\,dx$ b) $\displaystyle\int_1^2 (6-4t)^5\,dt$ c) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}\,dx$

d) $\displaystyle\int_0^\pi \sin(3t-\pi)\,dt$ e) $\displaystyle\int x^2\mathrm{e}^{x^3-2}\,dx$ f) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3(t)\cdot\cos(t)\,dt$

Aufgabe 3.
Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale. In welchen Fällen ergibt sich ein endlicher Wert? Wie groß ist er?

a) $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\,dt$ b) $\displaystyle\int_0^5 \frac{1}{x^2}\,dx$ c) $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{4-x}}\,dx$ d) $\displaystyle\int_9^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

Aufgabe 4.
Anna, Bernd und Cem haben auf verschiedenen Wegen das unbestimmte Integral

$$\int \sin(x)\cos(x)\,dx$$

berechnet.

Anna hat eine Formel für die Integration von $\int f(x)f'(x)\,dx$ verwendet. Sie hat sich daran erinnert, daß sie die Formel bei einem früheren Übungsblatt hergeleitet hat. Außerdem ist ihr aufgefallen, daß diese Formel hier passt.

Bernd hat mit partieller Integration gearbeitet. Zunächst schien die Methode bei diesem Integral nicht zu funktionieren. Es sah so aus, als hätte er sich im Kreis bewegt. Aber ein Umstellen der entstandenen Gleichung lieferte das Ergebnis.

Cem hat Substitution verwendet. Auch wenn die Methode nicht zu dem Integral zu passen schien, hat er sie trotzdem ausprobiert und dabei einen verblüffenden Weg zum Ergebnis gefunden.

Können Sie die Rechenwege von Anna, Bernd und Cem finden?