Flächenschwerpunkte, Guldinsche Regel für Rauminhalte

Aufgabe 1.
Berechnen Sie die Koordinaten des Schwerpunkts für die Fläche, die von $x = 1$ bis $x = 2$ zwischen der Kurve der Funktion $f(x) = 1/x$ und der x-Achse liegt. Zeichnen Sie eine Skizze.

Aufgabe 2.
Die Kurven der Funktionen $y = 4 - x^2$ und $y = 2 + x$ schließen eine Fläche ein. Berechnen Sie die Koordinaten des Schwerpunkts. Zeichnen Sie eine Skizze.

Aufgabe 3.
Wir betrachten die rechteckige Fläche, die von $x = a$ bis $x = b$ zwischen der konstanten Funktion $f(x) = c$ und der x-Achse liegt.

Wegen der Symmetrie der Fläche können die Koordinaten x_S und y_S des Schwerpunkts unmittelbar angegeben werden.

Berechnen Sie mit Hilfe der Guldinschen Regel die Rauminhalte V_x und V_y, die bei der Rotation der Fläche um die x-Achse und um die y-Achse entstehen.

Vergleichen Sie die Ergebnisse mit den Formeln, die man mit elementaren geometrischen Überlegungen für V_x und V_y bekommt.

Aufgabe 4.
Durch die Eckpunkte $(0\,|\,0)$, $(7\,|\,0)$ und $(0\,|\,2)$ ist ein rechtwinkliges Dreieck gegeben. Gesucht ist sein Flächenschwerpunkt.

Berechnen Sie die Koordinaten mit Hilfe der Guldinschen Regel. Die benötigten Rauminhalte können mit elementarer Geometrie bestimmt werden. Hinweis: Das Volumen eines Kreiskegels ist $V = (1/3) \cdot (\text{Grundfläche}) \cdot (\text{Höhe})$.

Aufgabe 5.
Die Fläche eines Dreiecks wird durch die beiden Koordinatenachsen und durch die Gerade, die bei a die x-Achse und bei b die y-Achse schneidet, eingeschlossen. Dabei sei $a > 0$ und $b > 0$. Berechnen Sie die Koordinaten des Schwerpunkts der Dreiecksfläche.