

Differentialgleichungen

Inhomogene lineare Dgl. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

- Satz

Es sei y_h die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0.$$

Es sei y_p eine beliebige spezielle (partikuläre) Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = g(x).$$

Dann ist die **allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung** gleich der Summe

$$y = y_h + y_p.$$

- Beweis

- Anmerkung: Da wir bereits wissen, wie y_h berechnet wird, stellt sich nur noch die Frage: Wie findet man eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung?

- **Lösungsansatz vom Typ der Störfunktion**

Um eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = g(x)$$

zu bekommen, verwenden wir einen Ansatz y_p von der „allgemeinen“ Form der rechten Seite $g(x)$. Dabei bedeutet „allgemein“, daß noch freie Parameter enthalten sind. Setzt man den Ansatz in die Differentialgleichung ein, ergeben sich für die Parameter spezielle Werte.

Sonderfälle hat man, wenn die Störfunktion $g(x)$ bereits in der Lösung der homogenen Differentialgleichung vorkommt; dann wird der Lösungsansatz mit x multipliziert (bzw. mit x^2 , falls das charakteristische Polynom eine doppelte Nullstelle besitzt).

Ist $g(x)$ eine Summe mehrerer Funktionen, dann wird der Lösungsansatz als Summe der entsprechenden Ansätze gewählt.

Für $g(x)$ und $k \cdot g(x)$ (mit k konstant) verwendet man dieselben Ansätze.

- Beispiel: $y'' - 4y = 3x^2$.
- Beispiel: Anfangswertaufgabe $\ddot{u} + 4\dot{u} + 3u = 8e^{-t}$, $u(0) = 5$, $\dot{u}(0) = -15$.
- Beispiel: Anfangswertaufgabe $y' + 5y = 4 \sin(3x)$, $y(0) = 1$.

Störfunktion: $g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$

Ansatz: $y_p = B_0 + B_1x + \dots + B_nx^n$

Ausnahme: in der Dgl. ist $a_0 = 0$ und $a_1 \neq 0$. Dann:
 $y_p = x(B_0 + B_1x + \dots + B_nx^n)$

Anmerkung: Der Fall $a_0 = a_1 = 0$ und $a_2 \neq 0$ ist hier irrelevant, da die Lösung dann direkt mit Integration berechnet werden kann.

Störfunktion: $g(x) = e^{cx}$

Ansatz: $y_p = A \cdot e^{cx}$

Ausnahmen: 1) Homogene Teillösungen e^{cx} , e^{λ_2x} , $c \neq \lambda_2$.
 Dann: $y_p = A \cdot x \cdot e^{cx}$
 2) Homogene Teillösungen e^{cx} , xe^{cx} .
 Dann: $y_p = A \cdot x^2 \cdot e^{cx}$

Störfunktion: $g(x) = \sin(\omega x)$ oder $g(x) = \cos(\omega x)$

Ansatz: $y_p = A \cdot \sin(\omega x) + B \cdot \cos(\omega x)$

Ausnahme: Homogene Teillösungen $\sin(\omega x)$, $\cos(\omega x)$.
 Dann: $y_p = x \cdot (A \cdot \sin(\omega x) + B \cdot \cos(\omega x))$

Störfunktion: $g(x) = e^{cx} \cdot \sin(\omega x)$ oder $g(x) = e^{cx} \cdot \cos(\omega x)$
Ansatz: $y_p = e^{cx} \cdot (A \cdot \sin(\omega x) + B \cdot \cos(\omega x))$
Ausnahme: Homogene Teillösungen $e^{cx} \cdot \sin(\omega x)$, $e^{cx} \cdot \cos(\omega x)$. Dann: $y_p = x \cdot e^{cx} \cdot (A \cdot \sin(\omega x) + B \cdot \cos(\omega x))$

Störfunktion: $g(x) = e^{i\omega x}$
Ansatz: $y_p = A \cdot e^{i(\omega x - \psi)}$
Ausnahme: Homogene Teillösung $e^{i\omega x}$. Dann: $y_p = A \cdot x \cdot e^{i(\omega x - \psi)}$

Störfunktion: $g(x) = e^{cx} \cdot e^{i\omega x}$
Ansatz: $y_p = A \cdot e^{cx} \cdot e^{i(\omega x - \psi)}$
Ausnahme: Homogene Teillösung $e^{cx} \cdot e^{i\omega x}$. Dann: $y_p = A \cdot x \cdot e^{cx} \cdot e^{i(\omega x - \psi)}$