

Reihen

Reihen von Zahlen — Reihen von Funktionen

- Die endliche Summe $a_1 + a_2 + \dots + a_k$ wird auch als

$$\sum_{n=1}^k a_n$$

geschrieben. Bei systematisch aufgebauten Summanden a_n kann es Formeln zur Berechnung des Summenwertes geben. Ein bekanntes Beispiel wird dem jungen Gauß zugeschrieben.

- Satz (Gaußsche Summenformel)

Es gilt:

$$\sum_{n=1}^k n = \frac{k(k+1)}{2}.$$

- Geht man — anschaulich gesprochen — von einer endlichen Summe zu einer unendlichen Summe über, so erhält man eine Reihe.

- Definition

Ist $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge, so heißt der Ausdruck

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

eine **Reihe**. Die a_n heißen die **Glieder** der Reihe.

- Anmerkung: Die Ausführung unendlich vieler Additionen ist nicht möglich. Wir betrachten deshalb die Folge (s_m) der endlichen **Partialsommen**

$$s_m = \sum_{n=1}^m a_n.$$

- Definition

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt **konvergent** zur Summe s , wenn die Folge $(s_m)_{m=1}^{\infty}$ der Partialsommen $s_m = \sum_{n=1}^m a_n$ gegen s konvergiert, d.h. wenn der Grenzwert $\lim_{m \rightarrow \infty} s_m = s$ existiert.

Schreibweise: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

Die Reihe heißt **divergent**, wenn die Folge (s_m) keinen endlichen Grenzwert besitzt.

- Beispiele: harmonische Reihe, geometrische Reihe.

- Satz

Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ ist für $|q| < 1$ konvergent und für $|q| \geq 1$ divergent. Es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad \text{für } |q| < 1.$$

- Anmerkung: Durch $\sum_{n=0}^{\infty} c q^n = c/(1-q)$ für $|q| < 1$ hat man eine einfache Verallgemeinerung; c ist dabei eine beliebige Konstante.

- Beweis

- Anmerkung: Der Beweis liefert auch eine Formel für die Berechnung endlicher geometrischer Reihen.

- Satz

Es gilt

$$\sum_{n=0}^m q^n = \frac{1 - q^{m+1}}{1 - q}$$

für beliebige Werte von q .

- Beispiele

- Anmerkung: Eine sehr anschauliche Methode, die Divergenz oder Konvergenz einer unendlichen Reihe zu zeigen, liefert das **Integralkriterium**.

- Beispiele: Nachweis der Divergenz der harmonischen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ und der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ mit Hilfe des Integralkriteriums.

- Anmerkung: Man kann mit dem Integralkriterium sehr einfach zeigen, daß die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^c$ für jeden Exponenten $c > 1$ konvergiert. Wesentlich schwieriger ist es, Formeln für die Grenzwerte zu bekommen; für geradzahlige c , also für $c = 2, 4, 6, \dots$, sind solche Ausdrücke seit Euler bekannt.

- Beispiele für konvergente nicht-geometrische Reihen und ihre Grenzwerte (ohne Herleitung).

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - + \dots = \frac{\pi}{4}$$

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots = e$$

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - + \dots = \ln 2$$

- Definition

Habe wir unendlich viele durchnummerierte Funktionen f_1, f_2, \dots , die alle auf derselben Teilmenge M der reellen Zahlen definiert sind, dann nennen wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

eine **Funktionenreihe** auf M .

Konvergiert für jedes $x \in M$ die Zahlenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, dann wird durch

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (x \in M)$$

auf M die **Grenzfunktion** f der Funktionenreihe definiert, und wir sagen, daß die Funktionenreihe auf M **punktweise konvergent** gegen f ist.

- Anmerkung: Wie bei Folgen von Funktionen müssen sich auch bei punktweise konvergenten Funktionenreihen die Eigenschaften der Summanden f_1, f_2, \dots keineswegs auf die Grenzfunktion übertragen.
- Beispiel: Die Reihe der Funktionen $f_n(x) = x^n$ ist auf dem Intervall $(-1, 1)$ punktweise konvergent, und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (x \in (-1, 1)).$$

- Beispiel: Für $s > 1$ ist durch

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

die Riemannsche Zetafunktion definiert. Sie kann in die komplexe Ebene „analytisch fortgesetzt“ werden. Die *Riemannsche Vermutung*, daß die nichttrivialen Nullstellen alle den Realteil $1/2$ haben, ist das berühmteste ungelöste Problem der Mathematik.