

## Laplace-Transformation

Anwendungen: Differentialgleichungen, Übertragungsvorgänge

- Beispiel: Gegeben sei die **lineare Anfangswertaufgabe mit konstanten Koeffizienten**

$$\dot{x} + 3x = 0, \quad x(0) = 5.$$

Wir berechnen die Lösung mit Hilfe der Laplace-Transformation in folgenden Schritten.

1. Schritt: Transformation der Differentialgleichung.
  2. Schritt: Auflösen nach  $\mathcal{L}\{x\}$ .
  3. Schritt: Rücktransformation.
- Prinzip:
    - Gegeben sind eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten sowie Anfangsbedingungen.
    - Durch Anwendung der Laplace-Transformation kommt man vom Originalraum in den Bildraum.
    - Man erhält eine algebraische Gleichung für die Transformierte der Lösungsfunktion.
    - Die algebraische Gleichung wird gelöst.
    - Durch Rücktransformation der Lösung kommt man vom Bildraum zurück in den Originalraum.
    - Man hat die spezielle Lösung der Differentialgleichung, d.h. die Lösung der Anfangswertaufgabe.

- Anmerkung: Die Rücktransformation aus dem Bild- in den Originalraum geschieht üblicherweise mit *Tabellen von Korrespondenzen* aus Formelsammlungen. Um diese verwenden zu können, wird die Bildfunktion zunächst in Ausdrücke umgeformt, die in den Tabellen stehen.

Dabei ist der folgende Satz über die Linearität der Rücktransformation nützlich.

- Satz

Die inverse Laplace-Transformation (Rücktransformation) ist linear, d.h. es gilt

$$\mathcal{L}^{-1}\{aF(s) + bG(s)\} = a\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + b\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$$

mit Konstanten  $a$  und  $b$ .

- Beweis
- Beispiel: Die spezielle Lösung der Differentialgleichung  $\ddot{x} + 9x = 0$  mit den Anfangsbedingungen  $x(0) = 7$  und  $\dot{x}(0) = -15$  wird berechnet.
- Beispiel: Ein spezieller **elektrischer Vierpol** wird verwendet, um die Anwendung der Laplacetransformation auf Übertragungsvorgänge zu demonstrieren. Gegeben ist dabei der Vierpol zusammen mit der Eingangsspannung  $u_e$ . Gesucht ist die Ausgangsspannung  $u_a$ .  
Es zeigt sich, daß die durch

$$G(s) = \frac{\mathcal{L}\{u_a\}}{\mathcal{L}\{u_e\}}$$

definierte **Übertragungsfunktion**  $G(s)$  eine wesentliche Rolle spielt.  $G(s)$  ist *charakteristisch für den Vierpol*, d.h. unabhängig von  $u_e$  und  $u_a$ .

- Prinzip: Ein System (z.B. eine elektrische Schaltung) zur Übertragung von Signalen (z.B. Spannungen) wird durch eine **Übertragungsfunktion**  $G(s)$  charakterisiert. Für Eingangssignale  $f_e(t)$  und Ausgangssignale  $f_a(t)$  gilt

$$\mathcal{L}\{f_a(t)\} = G(s) \cdot \mathcal{L}\{f_e(t)\}$$

beziehungsweise

$$\frac{\mathcal{L}\{f_a(t)\}}{\mathcal{L}\{f_e(t)\}} = G(s).$$

Ist für ein System die Übertragungsfunktion  $G(s)$  bekannt, muß zur Bestimmung von  $f_a$  lediglich

1.  $\mathcal{L}\{f_e(t)\}$ ,
2.  $G(s) \cdot \mathcal{L}\{f_e(t)\}$ ,
3.  $\mathcal{L}^{-1}\{G(s) \cdot \mathcal{L}\{f_e(t)\}\}$

berechnet werden.