

Komplexe Zahlen

Cartesische Darstellung und Arithmetik

- Problemstellung: Die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ hat keine reelle Lösung.
- Skizze; andere quadratische Gleichungen ohne reelle Lösung.
- Idee: Einführung „neuer Zahlen“; Erweiterung von \mathbb{R} (ähnlich: Erweiterung von \mathbb{Q} zu \mathbb{R}).

- Definition

Das Symbol i sei eine „Zahl“ mit $i^2 = -1$. Wir nennen i die **imaginäre Einheit**.

- Anmerkung: In den Ingenieurwissenschaften verwendet man anstelle von i auch das Symbol j , weil i in der Elektrotechnik für die Stromstärke steht.
- Anmerkung: Das Rechnen mit i „wie im Reellen“ unter Berücksichtigung von $i^2 = -1$ führt zu sinnvollen Anwendungen. Vielfache von i sind dann z.B. $2i$, $\frac{5}{2}i$ und $(-\frac{7}{3})i$. Wird noch eine reelle Zahl addiert, entstehen Ausdrücke wie z.B. $6 + 2i$ oder $5 - \frac{7}{3}i$. Ferner ist $2i = i2$ und $6 + 2i = 2i + 6$ u.s.w.

Diese Einführung der komplexen Zahlen ist nicht mathematisch streng, reicht aber als Einstieg für unsere Zwecke aus.

- Definition

Zahlen der Gestalt bi mit $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ heißen (**rein**) **imaginäre Zahlen**.

Zahlen der Form $a+bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ heißen **komplexe Zahlen**. Wir bezeichnen

$$\mathbb{C} = \{z \mid z = a + bi; a, b \in \mathbb{R}\}$$

als **Menge der komplexen Zahlen**.

Zu $z = a + bi$ heißt $a = \operatorname{Re}(z)$ der **Realteil** von z und $b = \operatorname{Im}(z)$ der **Imaginärteil** von z .

- Anmerkung: Man beachte, daß sowohl der Real- als auch der Imaginärteil eine reelle Zahl ist.
- Rechenregeln (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division).

- Anmerkung: Es gilt

$$\begin{aligned}a + bi = c + di &\Leftrightarrow a = c \text{ und } b = d, \\a + bi = 0 &\Leftrightarrow a = 0 \text{ und } b = 0, \\a + bi \neq 0 &\Leftrightarrow a^2 + b^2 \neq 0.\end{aligned}$$

Ferner ist $a + 0i = a$ für jedes $a \in \mathbb{R}$, also gilt auch $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

- Anmerkung: Man beachte, daß in \mathbb{C} keine Ordnungsrelation definiert ist. D.h. $<$, $>$, \leq , \geq machen bei Zahlen aus \mathbb{C} , die nicht zur Teilmenge \mathbb{R} gehören, keinen Sinn.
- Darstellung der komplexen Zahlen in der **komplexen Ebene** (Gaußschen Ebene).
- Geometrische Veranschaulichung von Addition und Subtraktion.
- Zahlenbeispiele für das Rechnen in \mathbb{C} .