Differentialgleichungen

Homogene lineare Dgl. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

- Einleitende Beispiele.
- Definition

  Eine Differentialgleichung vom Typ

  $$a_2\, y'' + a_1\, y' + a_0\, y = g(x)$$

  mit konstanten reellen Koeffizienten a_0, a_1 und a_2 heißt ***lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten***.

  Die Funktion g wird ***Störfunktion*** genannt. Ist $g \equiv 0$, so heißt die Differentialgleichung ***homogen***, sonst ***inhomogen***.
- Anmerkung: y, y' und y'' dürfen nur in der 1. Potenz und nicht miteinander multipliziert vorkommen.
- Beispiele
- Satz

  Für eine homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten gilt:

  1. Ist $y_1(x)$ eine Lösung, dann ist auch $y(x) = C \cdot y_1(x)$ mit einer reellen Konstanten C eine Lösung.
  2. Sind $y_1(x)$ und $y_2(x)$ Lösungen, dann ist auch die Linearkombination $y(x) = C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x)$ mit den reellen Konstanten C_1 und C_2 eine Lösung.
  3. Ist $y(x) = u(x) + iv(x)$ eine komplexwertige Lösung, dann sind $u(x)$ und $v(x)$ reelle Lösungen.
- Beweis
- Problem: Gesucht ist die allgemeine Lösung von $a_2\, y'' + a_1\, y' + a_0\, y = 0$.
- Lösungsidee: ***Exponentialansatz***. Dieser liefert das *charakteristische Polynom*. Die Berechnung der Nullstellen führt auf drei Fälle von Lösungen.