Laplace-Transformation

Rechenregeln

- Neben dem Linearitäts- und Differentiationssatz, die im ersten Skript zur Laplace-Transformation behandelt wurden, gibt es weitere Rechenregeln. Sie können zur Herleitung zusätzlicher Korrespondenzen verwendet werden, wobei bekannte Korrespondenzen auf verschiedene Arten abgeändert werden.

- Satz (***Ähnlichkeitssatz***)
  Ist $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, so gilt
  $$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{s}{a}\right) \qquad \text{mit } a > 0.$$

- Anmerkung: $f(at)$ ist eine „ähnliche" Kurve wie $f(t)$; es ist für $a < 1$ eine Streckung der Kurve von $f(t)$ in t-Richtung und für $a > 1$ eine Stauchung der Kurve von $f(t)$ in t-Richtung.

- Satz (***Verschiebungssatz***)
  Ist $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, so gilt
  1. $\mathcal{L}\{f(t - t_0)\} = e^{-st_0} \cdot F(s) \quad \text{mit } t_0 > 0,$
  2. $\mathcal{L}\{f(t + t_0)\} = e^{st_0} \cdot \left[F(s) - \int_0^{t_0} f(t)e^{-st}\,dt\right] \quad \text{mit } t_0 > 0.$

- Anmerkung: In beiden Fällen haben wir eine Verschiebung der Kurve der Funktion $f(t)$ um die Strecke t_0, zunächst bei $f(t - t_0)$ nach rechts und im zweiten Fall bei $f(t + t_0)$ nach links.

- Satz (***Dämpfungssatz***)
  Ist $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, so gilt
  $$\mathcal{L}\{e^{-\delta t} f(t)\} = F(s + \delta).$$

- Satz (***Transformation periodischer Funktionen***)
  Die Laplace-Transformierte einer *periodischen* Funktion $f(t)$ mit der Periode (Schwingungsdauer) T ist
  $$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \cdot \int_0^T f(t)e^{-st}\,dt.$$

- Beweise

- Beispiele