

Reihen

1. Gaußsche Summenformel:

$$\sum_{n=1}^m n = \frac{m(m+1)}{2}.$$

2. Geometrische Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad \text{für} \quad |q| < 1.$$

3. Endliche geometrische Reihe:

$$\sum_{n=0}^m q^n = \frac{1-q^{m+1}}{1-q}.$$

4. Taylorreihe der Funktion $f = f(x)$ mit Entwicklungspunkt $x = 0$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

5. Taylorreihe der Funktion $f = f(x)$ mit Entwicklungspunkt $x = x_0$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

6. Fourierreihe der 2π -periodischen Funktion $f = f(x)$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

$$\text{mit} \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\text{und} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

7. Fourierreihe der T -periodischen Funktion $f = f(t)$ mit der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/T$:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\omega nt) + b_n \sin(\omega nt))$$

$$\text{mit} \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(\omega nt) dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\text{und} \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(\omega nt) dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Laplace-Transformation

1. Laplace-Integral:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt.$$

2. Korrespondenzen:

$$\begin{aligned} 1 &\circ\bullet \frac{1}{s}, & t &\circ\bullet \frac{1}{s^2}, & t^n &\circ\bullet \frac{n!}{s^{n+1}}, \\ e^{at} &\circ\bullet \frac{1}{s-a}, & \sin(\omega t) &\circ\bullet \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}, & \cos(\omega t) &\circ\bullet \frac{s}{s^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

3. Linearitätssatz:

$$\mathcal{L}\{k \cdot f(t)\} = k \cdot \mathcal{L}\{f(t)\} \quad \text{und} \quad \mathcal{L}\{f(t) + g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} + \mathcal{L}\{g(t)\}.$$

4. Differentiationsatz:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'(t)\} &= s \cdot \mathcal{L}\{f(t)\} - f(0), \\ \mathcal{L}\{f''(t)\} &= s^2 \cdot \mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0), \\ \mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} &= s^n \cdot \mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0). \end{aligned}$$

5. Ähnlichkeitssatz: Ist $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, so gilt für $a > 0$

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{s}{a}\right).$$

6. Verschiebungssatz: Ist $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, so gilt für $t_0 > 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t - t_0)\} &= e^{-st_0} \cdot F(s), \\ \mathcal{L}\{f(t + t_0)\} &= e^{st_0} \cdot \left[F(s) - \int_0^{t_0} f(t)e^{-st} dt \right]. \end{aligned}$$

7. Dämpfungssatz: Ist $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, so gilt

$$\mathcal{L}\{e^{-\delta t} f(t)\} = F(s + \delta).$$

8. Linearitätssatz für die Rücktransformation:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{k \cdot F(s)\} &= k \cdot \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}, \\ \mathcal{L}^{-1}\{F(s) + G(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}. \end{aligned}$$

9. Faltungssatz: Es sei $F_1(s) \bullet\circ f_1(t)$ und $F_2(s) \bullet\circ f_2(t)$. Dann gilt

$$F_1(s) \cdot F_2(s) \bullet\circ \int_0^t f_1(u) \cdot f_2(t - u) du.$$