## Komplexe Zahlen

## Cartesische Darstellung und Arithmetik

- Problemstellung: Die Gleichung  $x^2 + 1 = 0$  hat keine reelle Lösung.
- Skizze; andere quadratische Gleichungen ohne reelle Lösung.
- Idee: Einführung "neuer Zahlen"; Erweiterung von  $\mathbb{R}$  (ähnlich: Erweiterung von  $\mathbb{Q}$  zu  $\mathbb{R}$ ).
- Definition

Das Symbol i sei eine "Zahl" mit  $i^2 = -1$ . Wir nennen i die  $imagin\"{a}re$  Einheit.

- Anmerkung: In den Ingenieurwissenschaften verwendet man anstelle von *i* auch das Symbol *j*, weil *i* in der Elektrotechnik für die Stromstärke steht.
- Anmerkung: Das Rechnen mit i "wie im Reellen" unter Berücksichtigung von  $i^2 = -1$  führt zu sinnvollen Anwendungen. Vielfache von i sind dann z.B. 2i,  $\frac{5}{2}i$  und  $(-\frac{7}{3})i$ . Wird noch eine reelle Zahl addiert, entstehen Ausdrücke wie z.B. 6 + 2i oder  $5 \frac{7}{3}i$ . Ferner ist 2i = i2 und 6 + 2i = 2i + 6 u.s.w.

Diese Einführung der komplexen Zahlen ist nicht mathematisch streng, reicht aber als Einstieg für unsere Zwecke aus.

• Definition

Zahlen der Gestalt bi mit  $b \in \mathbb{R}$ ,  $b \neq 0$  heißen (rein) imaginäre Zahlen. Zahlen der Form a+bi mit  $a, b \in \mathbb{R}$  heißen komplexe Zahlen. Wir bezeichnen

$$\mathbb{C} = \{ z \mid z = a + bi; a, b \in \mathbb{R} \}$$

als Menge der komplexen Zahlen.

Zu z = a + bi heißt a = Re(z) der **Realteil** von z und b = Im(z) der **Imaginärteil** von z.

- Anmerkung: Man beachte, daß sowohl der Real- als auch der Imaginärteil eine reelle Zahl ist.
- Rechenregeln (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division).

Copyright © 2014 Prof. Dr. Hans-Rudolf Metz. All rights reserved.

• Anmerkung: Es gilt

$$a+bi=c+di \qquad \Leftrightarrow \qquad a=c \text{ und } b=d,$$
  $a+bi=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad a=0 \text{ und } b=0,$   $a+bi\neq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad a^2+b^2\neq 0.$ 

Ferner ist a+0i=a für jedes  $a\in\mathbb{R}$ , also gilt auch  $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ .

- Anmerkung: Man beachte, daß in  $\mathbb{C}$  keine Ordnungsrelation definiert ist. D.h.  $<,>,\leq,\geq$  machen bei Zahlen aus  $\mathbb{C}$ , die nicht zur Teilmenge  $\mathbb{R}$  gehören, keinen Sinn.
- Darstellung der komplexen Zahlen in der *komplexen Ebene* (Gaußschen Ebene).
- Geometrische Veranschaulichung von Addition und Subtraktion.
- $\bullet$  Zahlenbeispiele für das Rechnen in  $\mathbb{C}$ .