Komplexe Zahlen

Konjugiert komplexe Zahlen, Beträge, Polarkoordinaten

- Definition

  Für $z = a + bi$ heißt
  $$\overline{z} = a - bi$$
  die zu z ***konjugiert komplexe*** Zahl.

- Anmerkung: Statt $\overline{z}$ schreibt man auch z^*.

- Skizze und Beispiele.

- Satz (Eigenschaften konjugiert komplexer Zahlen)

  Für z, z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$ gilt:

  (a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$,

  (b) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$,

  (c) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2} \qquad (z_2 \neq 0)$,

  (d) $\overline{(\overline{z})} = z$,

  (e) $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}\,(z + \overline{z}), \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}\,(z - \overline{z})$.

- Beweis

- Definition

  Zu $z = a + bi$ heißt die reelle Zahl
  $$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$
  der ***Betrag*** von z.

- Skizze und Beispiele.

- Satz (Eigenschaften des Betrages)

  Für z, z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$ gilt:

  (a) $|z| \geq 0$,

  (b) $|z| = 0$ genau dann, wenn $z = 0$,

  (c) $|z| = |\overline{z}|$,

(d) $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$,

(e) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

- Anmerkung: Aus $\sqrt{z \cdot \overline{z}} = |z|$ folgt durch Quadrieren $z \cdot \overline{z} = |z|^2$, woraus sich unmittelbar $z \cdot \overline{z} \in \mathbb{R}$ und $z \cdot \overline{z} \geq 0$ ergibt.

  Eine Anwendung haben wir bei der Division komplexer Zahlen. Ist der Nenner gleich $z \neq 0$, wird mit der konjugiert komplexen Zahl $\overline{z}$ erweitert, und der neue Nenner $z \cdot \overline{z}$ ist reell. Wegen $z \neq 0$ ist er außerdem echt größer Null.

- Beweis

- Polarkoordinaten r, φ für eine Zahl $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$.

- Definition

  Zur komplexen Zahl $z \neq 0$ heißt

$$z = r(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$$

  die ***trigonometrische Darstellung*** von z. Der Winkel φ heißt ***Argument*** von z,

$$\varphi = \arg(z).$$

- Beispiele

- Umrechnungen zwischen cartesischen und polaren Koordinaten.