# Komplexe Zahlen

## Die $e$-Funktion im Komplexen

- Definition ($e$-Funktion im Komplexen)

  Zu $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$ setzen wir

  $$e^z = e^x(\cos y + i \sin y).$$

- Anmerkung:

  (a) $e^z$ ist eine Abbildung von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$. Die reelle $e$-Funktion ist der Spezialfall mit $y = 0$.

  (b) Für $x = 0$ gilt speziell

  $$e^{iy} = \cos y + i \sin y.$$

  Mit der Definition von $e^z$

  $$\underbrace{e^z}_{=e^{x+iy}} = e^x \underbrace{(\cos y + i \sin y)}_{=e^{iy}}$$

  folgt also

  $$e^{x+iy} = e^x e^{iy}$$

  für alle $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

- Motivation für die Definition der $e$-Funktion im Komplexen.

- Satz (Eigenschaften der $e$-Funktion)

  Es gilt

  (a) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$ für alle $z_1$, $z_2 \in \mathbb{C}$;

  (b) $e^z \neq 0$ und $\dfrac{1}{e^z} = e^{-z}$ für alle $z \in \mathbb{C}$;

  (c) $|e^{i\varphi}| = 1$ für alle $\varphi \in \mathbb{R}$, und $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$ für alle $z \in \mathbb{C}$;

  (d) $e^{i\varphi}$ liegt auf dem Einheitskreis und bildet den Winkel $\varphi$ mit der positiven reellen Achse;

  (e) $e^{z+2\pi ik} = e^z$, falls $k$ ganz ist, d.h. $e^z$ ist $2\pi i$-periodisch.

- Anmerkung: Speziell ist $i = e^{i\pi/2}$ und $-1 = e^{i\pi}$, und es gilt

  $$1 + e^{i\pi} = 0.$$

  (Diese Gleichung ist ein heißer Anwärter auf den Titel der schönsten Gleichung der Mathematik; es treten genau die wichtigsten Zahlen und die wichtigsten Operationen auf und sonst nichts.)

- Anmerkung: Wir benötigen in dem Beweis die Additionstheoreme für die Sinus- und Cosinusfunktion. Es gilt

  $$\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta), \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta) \end{aligned}$$

  für beliebige $\alpha$, $\beta \in \mathbb{R}$.

- Beweis

- Die zentrale Gleichung bei der $e$-Funktion im Komplexen ist der Zusammenhang

  $$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

  mit der Sinus- und Cosinusfunktion. Damit kann die trigonometrische Darstellung der komplexen Zahlen umgeschrieben werden zu

  $$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}.$$

- Definition

  Zur komplexen Zahl $z \neq 0$ heißt

  $$z = re^{i\varphi}$$

  mit $r = |z|$ und $\varphi = \arg(z)$ die ***Exponentialdarstellung*** von $z$.

- Beispiele