Differentialgleichungen

Inhomogene lineare Dgl. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

- Satz

  Es sei y_h die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

  $$a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0.$$

  Es sei y_p eine beliebige spezielle (partikuläre) Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

  $$a_2y'' + a_1y' + a_0y = g(x).$$

  Dann ist die ***allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung*** gleich der Summe

  $$y = y_h + y_p.$$

- Beweis

- Anmerkung: Da wir bereits wissen, wie y_h berechnet wird, stellt sich nur noch die Frage: Wie findet man eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung?

- ***Lösungsansatz vom Typ der Störfunktion***

  Um eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

  $$a_2y'' + a_1y' + a_0y = g(x)$$

  zu bekommen, verwenden wir einen Ansatz y_p von der „allgemeinen“ Form der rechten Seite $g(x)$. Dabei bedeutet „allgemein“, daß noch freie Parameter enthalten sind. Setzt man den Ansatz in die Differentialgleichung ein, ergeben sich für die Parameter spezielle Werte.

  Sonderfälle hat man, wenn die Störfunktion $g(x)$ bereits in der Lösung der homogenen Differentialgleichung vorkommt; dann wird der Lösungsansatz mit x multipliziert (bzw. mit x^2, falls das charakteristische Polynom eine doppelte Nullstelle besitzt).

  Ist $g(x)$ eine Summe mehrerer Funktionen, dann wird der Lösungsansatz als Summe der entsprechenden Ansätze gewählt.

  Für $g(x)$ und $k \cdot g(x)$ (mit k konstant) verwendet man dieselben Ansätze.

- Beispiel: $y'' - 4y = 3x^2$.
- Beispiel: Anfangswertaufgabe $\ddot{u} + 4\dot{u} + 3u = 8e^{-t}$, $u(0) = 5$, $\dot{u}(0) = -15$.
- Beispiel: Anfangswertaufgabe $y' + 5y = 4\sin(3x)$, $y(0) = 1$.

Störfunktion:	$g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$
Ansatz:	$y_p = B_0 + B_1 x + \cdots + B_n x^n$
Ausnahme:	in der Dgl. ist $a_0 = 0$ und $a_1 \neq 0$. Dann: $y_p = x(B_0 + B_1 x + \cdots + B_n x^n)$

Anmerkung: Der Fall $a_0 = a_1 = 0$ und $a_2 \neq 0$ ist hier irrelevant, da die Lösung dann direkt mit Integration berechnet werden kann.

Störfunktion:	$g(x) = e^{cx}$
Ansatz:	$y_p = A \cdot e^{cx}$
Ausnahmen:	1) Homogene Teillösungen e^{cx}, $e^{\lambda_2 x}$, $c \neq \lambda_2$. Dann: $y_p = A \cdot x \cdot e^{cx}$ 2) Homogene Teillösungen e^{cx}, xe^{cx}. Dann: $y_p = A \cdot x^2 \cdot e^{cx}$

Störfunktion:	$g(x) = \sin(\omega x)$ oder $g(x) = \cos(\omega x)$
Ansatz:	$y_p = A \cdot \sin(\omega x) + B \cdot \cos(\omega x)$
Ausnahme:	Homogene Teillösungen $\sin(\omega x)$, $\cos(\omega x)$. Dann: $y_p = x \cdot (A \cdot \sin(\omega x) + B \cdot \cos(\omega x))$

Störfunktion:	$g(x) = e^{cx} \cdot \sin(\omega x)$ oder $g(x) = e^{cx} \cdot \cos(\omega x)$
Ansatz:	$y_p = e^{cx} \cdot (A \cdot \sin(\omega x) + B \cdot \cos(\omega x))$
Ausnahme:	Homogene Teillösungen $e^{cx} \cdot \sin(\omega x)$, $e^{cx} \cdot \cos(\omega x)$. Dann: $y_p = x \cdot e^{cx} \cdot (A \cdot \sin(\omega x) + B \cdot \cos(\omega x))$

Störfunktion:	$g(x) = e^{i\omega x}$
Ansatz:	$y_p = A \cdot e^{i(\omega x - \psi)}$
Ausnahme:	Homogene Teillösung $e^{i\omega x}$. Dann: $y_p = A \cdot x \cdot e^{i(\omega x - \psi)}$

Störfunktion:	$g(x) = e^{cx} \cdot e^{i\omega x}$
Ansatz:	$y_p = A \cdot e^{cx} \cdot e^{i(\omega x - \psi)}$
Ausnahme:	Homogene Teillösung $e^{cx} \cdot e^{i\omega x}$. Dann: $y_p = A \cdot x \cdot e^{cx} \cdot e^{i(\omega x - \psi)}$