Differentialgleichungen

Heun-Verfahren und Runge-Kutta-Verfahren zum numerischen Lösen von Differentialgleichungen

- Problemstellung: Zu der Anfangswertaufgabe (AWA) bestehend aus der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ und der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ soll eine numerische Näherungslösung berechnet werden.

  Das Euler-Cauchy-Verfahren realisiert die Grundidee: Mit Hilfe von Steigungswerten — also mit Hilfe des Richtungsfeldes — wird ein Polygonzug als Näherung für die Lösungskurve gebildet.

  Die Verfahren von Heun und Runge-Kutta verfeinern dieses Vorgehen.

- Das ***Heun-Verfahren***.

- Idee: Bei der Berechnung des Polygonzugs verwendet das Euler-Cauchy-Verfahren für ein Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ nur Informationen vom linken Rand. Der Anfangspunkt der neuen Strecke liegt an der Stelle x_i, und das zugehörige Richtungselement liefert den Steigungswert.

  Es ist aber anschaulich klar, daß die Lösungskurve auf $[x_i, x_{i+1}]$ nicht nur durch das Linienelement am linken Rand, sondern durch die Linienelemente des gesamten Intervalls beschrieben wird.

  Also nimmt das Heun-Verfahren die Steigung an x_i, führt einen Euler-Cauchy-Schritt durch, bekommt eine Strecke auf dem Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ und damit einen neuen Steigungswert an x_{i+1}. Aus diesen beiden Steigungswerten wird dann der ***Mittelwert*** gebildet. Die Strecke des Euler-Cauchy-Schritts wird verworfen, und die neue und endgültige Strecke auf $[x_i, x_{i+1}]$ wird so gewählt, daß ihre Steigung gleich dem Mittelwert ist.

- Iterationsvorschrift

  Aus x_i und y_i soll die Näherung an der Stelle $x_{i+1} = x_i + h$ berechnet werden, wobei h die gewählte Schrittweite ist. Dazu bestimmt man zunächst

  $$p_i = f(x_i, y_i) \qquad \text{(Steigung an der Stelle } x_i\text{)}$$

  und mit einem Euler-Cauchy-Schritt die vorläufige Näherung $y_i + hp_i$ an der Stelle $x_i + h$. In f eingesetzt ergibt sich

  $$q_i = f(x_i + h, y_i + hp_i) \qquad \text{(Steigung an der Stelle } x_i + h\text{).}$$

Die Heun-Formel

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \frac{p_i + q_i}{2}$$

verwendet den Mittelwert $(p_i + q_i)/2$ der Steigungen und liefert damit die endgültige Näherung an der Stelle x_{i+1}.

- Skizze zur Herleitung der Iterationsvorschrift.
- Beispiel
- Das ***Runge-Kutta-Verfahren***. Genauer: Das klassische Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung.
- Idee: Der Grundgedanke des Heun-Verfahrens wird weiter verbessert, indem nicht nur Steigungswerte vom linken und rechten Intervallrand genommen werden, sondern auch zwei aus der Mitte des Intervalls. Damit wird ein ***gewichteter Mittelwert*** gebildet, bei dem die Steigungen in der Intervallmitte stärker berücksichtigt werden als die am Rand.
- Iterationsvorschrift

  Als Näherung für $y(x_1)$ wird

  $$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

  genommen, wobei

  $$\begin{aligned} k_1 &= h \cdot f(x_0, y_0), \\ k_2 &= h \cdot f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right), \\ k_3 &= h \cdot f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right), \\ k_4 &= h \cdot f(x_0 + h, y_0 + k_3) \end{aligned}$$

  ist. Dabei bedeutet h die Schrittweite.

  Entsprechend berechnet man Näherungen y_2, y_3 u.s.w.
- Skizze; Herleitung der Iterationsvorschrift.
- Fehlerabschätzung

  Als Fehlerabschätzung kann man

  $$\Delta y_i = |y(x_i) - y_i| \approx \frac{1}{15}|y_i - \tilde{y}_i|$$

  verwenden (ohne Herleitung), wobei $\tilde{y}_i$ die Näherung an x_i mit der doppelten Schrittweite wie bei y_i ist.
- Beispiel