Reihen

Fourierreihen — Berechnung der Fourierkoeffizienten

- Satz

  Die Funktion f sei auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ durch die gleichmäßig konvergente trigonometrische Reihe

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \Big)$$

  gegeben. Dann berechnen sich die Koeffizienten durch

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

  und durch

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx)\, dx \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

- Anmerkung: Die gleichmäßige Konvergenz einer Funktionenreihe ist eine stärkere Eigenschaft als die punktweise Konvergenz; für die Definition verweisen wir auf die Literatur.

  Wir fordern die gleichmäßige Konvergenz, weil daraus folgt, daß zum einen $f(x)\cos(nx)$ und $f(x)\sin(nx)$ integrierbar sind, und zum anderen die Reihe gliedweise integriert werden darf (ohne Beweis).

  Damit ist sichergestellt, daß wir im folgenden Beweis nichts verbotenes tun.

- Beweis

- Definition

  Die zu einer gegebenen Funktion f gemäß den obigen Formeln berechneten a_n und b_n werden die ***Fourierkoeffizienten*** von f genannt.

  Die damit aufgestellte trigonometrische Reihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \Big)$$

  heißt die ***Fourierreihe*** von f.

- Anmerkung: Die Fourierreihe einer Funktion f muß nicht konvergieren, und selbst wenn sie für einen bestimmten x-Wert konvergent ist, muß der Grenzwert nicht gleich $f(x)$ sein.

  Für welche Werte von x die Reihe konvergiert, und gegen welche Grenzfunktion sie auf ihrem Konvergenzbereich geht, hängt von der Funktion f ab.

- Frage: Gibt es eine einfache Bedingung für die Funktion f, damit die Fourierreihe von f auf der gesamten reellen Achse konvergiert und f als Grenzfunktion hat?

- Satz

  Ist die 2π-periodische Funktion f auf dem Intervall $[0, 2\pi]$

  1. stückweise monoton und stetig, oder sogar
  2. stückweise stetig differenzierbar,

  so konvergiert die Fourierreihe von f für jedes reelle x gegen den Mittelwert aus links- und rechtsseitigem Grenzwert

  $$\frac{f(x+) + f(x-)}{2}\,.$$

  Also konvergiert die Fourierreihe gegen $f(x)$, wenn f in x stetig ist.

  (Ohne Beweis. Siehe z.B.: Heuser, Lehrbuch der Analysis, Teil 2.)

- Anmerkung: Mit „stückweise monoton und stetig“ bzw. „stückweise stetig differenzierbar“ ist gemeint, daß diese Eigenschaften auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ mit Ausnahme von endlich vielen Punkten gelten, und daß in diesen Punkten alle in Frage kommenden einseitigen Grenzwerte existieren.

- Beispiel: $f(x) = x - \pi$ für $x \in (0, 2\pi)$, $f(0) = 0$, und f sei 2π-periodisch.

- Beispiel: Es sei

  $$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x = 0, \\ 1, & \text{für } x \in (0, \pi), \\ 0, & \text{für } x = \pi, \\ -1, & \text{für } x \in (\pi, 2\pi), \end{cases}$$

  und f sei 2π-periodisch.

- Anmerkung:

  1. Ist f eine gerade Funktion, gilt also $f(-x) = f(x)$, enthält die Fourierreihe nur den konstanten Term und Cosinusterme. Ist f ungerade, hat man also $f(-x) = -f(x)$, enthält f nur Sinusterme.

2. Bei der Berechnung der Fourierkoeffizienten kann man aufgrund der 2π-Periodizität statt von 0 bis 2π auch von k bis $k + 2\pi$ integrieren, wobei k eine beliebige reelle Zahl ist, d.h. es gilt

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_k^{k+2\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$$

und entsprechendes für die Koeffizienten b_n.

3. Aus den Formeln für 2π-periodische Funktionen lassen sich durch eine einfache Transformation Formeln für Fourierreihen mit beliebiger Periode herleiten.

   Hat die Funktion $f = f(t)$ die Periode T, dann ergibt sich mit der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/T$ die Fourierreihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(\omega n t) + b_n \sin(\omega n t) \Big)$$

   und die Fourierkoeffizienten werden durch

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(\omega n t)\, dt \qquad (n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots)$$

   und

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(\omega n t)\, dt \qquad (n = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots).$$

   berechnet.