

Laplace-Transformation

Anwendungen: Differentialgleichungen, Übertragungsvorgänge

- Beispiel: Gegeben sei die **lineare Anfangswertaufgabe mit konstanten Koeffizienten**

$$\dot{x} + 3x = 0, \quad x(0) = 5.$$

Wir berechnen die Lösung mit Hilfe der Laplace-Transformation in folgenden Schritten.

1. Schritt: Transformation der Differentialgleichung.
 2. Schritt: Auflösen nach $\mathcal{L}\{x\}$.
 3. Schritt: Rücktransformation.
- Prinzip:
 - Gegeben sind eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten sowie Anfangsbedingungen.
 - Durch Anwendung der Laplace-Transformation kommt man vom Originalraum in den Bildraum.
 - Man erhält eine algebraische Gleichung für die Transformierte der Lösungsfunktion.
 - Die algebraische Gleichung wird gelöst.
 - Durch Rücktransformation der Lösung kommt man vom Bildraum zurück in den Originalraum.
 - Man hat die spezielle Lösung der Differentialgleichung, d.h. die Lösung der Anfangswertaufgabe.

- Anmerkung: Die Rücktransformation aus dem Bild- in den Originalraum geschieht üblicherweise mit *Tabellen von Korrespondenzen* aus Formelsammlungen. Um diese verwenden zu können, wird die Bildfunktion zunächst in Ausdrücke umgeformt, die in den Tabellen stehen.

Dabei ist der folgende Satz über die Linearität der Rücktransformation nützlich.

- Satz

Die inverse Laplace-Transformation (Rücktransformation) ist linear, d.h. es gilt

$$\mathcal{L}^{-1}\{aF(s) + bG(s)\} = a \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + b \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$$

mit Konstanten a und b .

- Beweis
- Beispiel: Die spezielle Lösung der Differentialgleichung $\ddot{x} + 9x = 0$ mit den Anfangsbedingungen $x(0) = 7$ und $\dot{x}(0) = -15$ wird berechnet.
- Beispiel: Ein spezieller **elektrischer Vierpol** wird verwendet, um die Anwendung der Laplacetransformation auf Übertragungsvorgänge zu demonstrieren. Gegeben ist dabei der Vierpol zusammen mit der Eingangsspannung u_e . Gesucht ist die Ausgangsspannung u_a .
Es zeigt sich, daß die durch

$$G(s) = \frac{\mathcal{L}\{u_a\}}{\mathcal{L}\{u_e\}}$$

definierte **Übertragungsfunktion** $G(s)$ eine wesentliche Rolle spielt. $G(s)$ ist *charakteristisch für den Vierpol*, d.h. unabhängig von u_e und u_a .

- Prinzip: Ein System (z.B. eine elektrische Schaltung) zur Übertragung von Signalen (z.B. Spannungen) wird durch eine **Übertragungsfunktion** $G(s)$ charakterisiert. Für Eingangssignale $f_e(t)$ und Ausgangssignale $f_a(t)$ gilt

$$\mathcal{L}\{f_a(t)\} = G(s) \cdot \mathcal{L}\{f_e(t)\}$$

beziehungsweise

$$\frac{\mathcal{L}\{f_a(t)\}}{\mathcal{L}\{f_e(t)\}} = G(s).$$

Ist für ein System die Übertragungsfunktion $G(s)$ bekannt, muß zur Bestimmung von f_a lediglich

1. $\mathcal{L}\{f_e(t)\}$,
2. $G(s) \cdot \mathcal{L}\{f_e(t)\}$,
3. $\mathcal{L}^{-1}\{G(s) \cdot \mathcal{L}\{f_e(t)\}\}$

berechnet werden.