Reihen: Taylorreihen

Aufgabe 1.
Die Kurve der Funktion $y = 1/\cos(x)$ soll in der Umgebung von $x = 0$ durch eine Parabel angenähert werden. Berechnen Sie dazu für $y = 1/\cos(x)$ die Taylorreihenentwicklung um den Nullpunkt bis zum x^2–Term.

Aufgabe 2.
Berechnen Sie zur Funktion $f(x) = 1/(1+x^2)$ das Taylorpolynom zweiten Grades mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$, d.h. nähern Sie die Kurve von f in der Umgebung von $x_0 = 0$ durch eine Parabel an. Skizzieren Sie die Funktion f und die Näherung.

Aufgabe 3.
Die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ soll in eine Taylorreihe um den Punkt $x = 1$ entwickelt werden. (Berechnen Sie nur die Terme bis $(x-1)^4$.)

Aufgabe 4.
Berechnen Sie zu $y = (1+x)^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ die ersten vier Glieder der Taylorreihe mit der Entwicklungsmitte $x = 0$. Betrachten Sie das Ergebniss mit speziellen Werten für α, beispielsweise $\alpha = 2$ oder $\alpha = -1$. Welche Formeln entstehen?

Aufgabe 5.
Es seien zwei voneinander verschiedene Funktionen f und g gegeben, für die $f(0) = 0$ und $g(0) = 1$ gilt, und deren Ableitungen die Gleichungen $f' = g$ und $g' = f$ erfüllen. (Sie können die folgenden Aufgabenstellungen mit ausschließlich diesen Informationen lösen!)

1. Entwickeln Sie die Funktionen in Taylorreihen mit dem Nullpunkt als Entwicklungsmitte.
2. Finden Sie Darstellungen von f und von g durch elementare Funktionen, indem Sie für f und g jeweils eine Differentialgleichung aufstellen und lösen.
3. Berechnen Sie erneut die Tayloreihen von f und g, indem Sie die gewonnenen Darstellungen durch elementare Funktionen verwenden: Setzen Sie die Taylorreihen der elementaren Funktionen ein, und fassen Sie Terme zusammen, als würden Sie mit Polynomen rechnen.
4. Wie werden die Funktionen f und g üblicherweise bezeichnet?