Reihen

Folgen von Zahlen — Folgen von Funktionen

- Definition

  Wird jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Zahl a_n zugeordnet, so entsteht eine ***unendliche Zahlenfolge***

  $$a_1,\, a_2,\, a_3,\, \ldots$$

  Schreibweise: $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ oder kurz (a_n).

  Die Zahlen a_n heißen ***Glieder*** der Folge.

- Anmerkung:

  1. Die Indizierung darf statt mit 1 auch mit jeder anderen ganzen Zahl beginnen.
  2. Eine Folge kann als Funktion f mit

     $$f:\, \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(n) = a_n$$

     aufgefaßt werden.
  3. Die Vorschrift $a_n = f(n)$ heißt ***Bildungsgesetz*** der Folge.
  4. Eine ***endliche*** Folge

     $$a_1,\, a_2,\, a_3,\, \ldots,\, a_m$$

     wird entsprechend geschrieben: $(a_n)_{n=1}^{m}$.

- Beispiele, u.a.

  – Folge der Primzahlen,
  – arithmetische Folge,
  – geometrische Folge,
  – Fibonacci-Folge.

- Beispiele für konvergente Folgen (Begriff der Konvergenz anschaulich).

- Definition

  Die Zahlenfolge (a_n) ***konvergiert*** gegen g (strebt gegen g), wenn es zu jeder Zahl $\epsilon > 0$ einen Index $n_0(\epsilon)$ gibt, so daß

  $$|a_n - g| < \epsilon \qquad \text{für alle } n > n_0(\epsilon)$$

  ist. Dabei heißt g der ***Grenzwert*** (Limes) der Folge (a_n). Schreibweise: $\lim_{n\to\infty} a_n = g$ oder $a_n \to g$ $(n \to \infty)$.

  Die Folge (a_n) heißt ***divergent***, wenn sie nicht konvergent ist.

- Satz

  Eine konvergente Folge besitzt *genau einen* Grenzwert.

- Beispiele, u.a.

  - die Nullfolge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$
  - die Folge $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n=1}^{\infty}$
  - eine bestimmt divergente Folge (Begriff des uneigentlichen Grenzwerts, Schreibweise)
  - die Folge $\left(\frac{3n^2-2n+1}{n^2+4}\right)_{n=1}^{\infty}$
  - die geometrische Folge $(q^n)_{n=0}^{\infty}$

- Definition

  Habe wir unendlich viele durchnumerierte Funktionen f_1, f_2, $\ldots$, die alle auf derselben Teilmenge M der reellen Zahlen definiert sind, dann nennen wir $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ eine ***Funktionenfolge*** auf M.

  Konvergiert für jedes $x \in M$ die Zahlenfolge $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$, dann wird durch

  $$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (x \in M)$$

  auf M die ***Grenzfunktion*** f der Funktionenfolge definiert, und wir sagen, daß die Funktionenfolge auf M ***punktweise konvergent*** gegen f ist, geschrieben

  $$f_n \to f \quad (n \to \infty) \quad \text{auf } M, \qquad \text{oder} \qquad \lim_{n\to\infty} f_n = f \quad \text{auf } M.$$

- Anmerkung: Eigenschaften der Funktionen f_1, f_2, $\ldots$ müssen sich bei punktweiser Konvergenz nicht auf die Grenzfunktion übertragen. Sind beispielsweise alle Funktionen f_1, f_2, $\ldots$ stetig, dann muß die Grenzfunktion keineswegs stetig sein.

- Beispiele