

## Reihen

### Fourierreihen — Spektraldarstellung, komplexe Schreibweise

- Satz

Eine Fourierreihe kann aus der Cosinus-Sinus-Darstellung in eine Amplituden-Phasen-Darstellung umgeschrieben werden:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nx - \phi_n).$$

Dabei ist

$$A_0 = \frac{a_0}{2} \quad \text{und} \quad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \text{für } n = 1, 2, \dots$$

sowie

$$\phi_n = \begin{cases} \arctan(b_n/a_n) & \text{für } a_n > 0, \\ \arctan(b_n/a_n) + \pi & \text{für } a_n < 0. \end{cases}$$

- Beweis

- Anmerkung: Die Amplituden-Phasen-Form der Fourierreihe heißt auch die **spektrale Darstellung**.

- Definition

Als **Amplitudenspektrum** bezeichnen wir die graphische Darstellung der Amplituden  $A_n$  in Abhängigkeit von  $n$ .

Entsprechend heißt die graphische Darstellung der Phasenverschiebungen  $\phi_n$  als Funktion von  $n$  das **Phasenspektrum**.

- Anmerkung: Man spricht vom *Zeitbereich* bzw. vom *Frequenzbereich*, wenn man eine Funktion einerseits durch ihre zeitabhängigen Funktionswerte und andererseits durch ihre frequenzabhängigen Amplituden darstellt.

- Beispiele

- Satz

Es sei  $f$  eine  $2\pi$ -periodische Funktion, und  $a_n$  und  $b_n$  seien die Fourierkoeffizienten von  $f$ . Dann kann die Fourierreihe von  $f$  in der **komplexen Schreibweise** als

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

geschrieben werden, wobei die  $c_n$  durch die Formeln

$$\begin{aligned}c_0 &= \frac{a_0}{2} \\c_n &= \frac{a_n - ib_n}{2} \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \dots \\c_n &= \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} \quad \text{für } n = -1, -2, -3, \dots\end{aligned}$$

gegeben sind. Dabei ist  $i$  die imaginäre Einheit.

Die Koeffizienten der komplexen Fourierreihe können auch direkt durch die Integrale mit komplexen Integranden

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad \text{für } n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

berechnet werden.

- Beweis
- Beispiel