

## Laplace-Transformation

### Laplace-Integral, grundlegende Eigenschaften, Korrespondenzen

- Begriff der Transformation und Rücktransformation einer Funktion.
- Im folgenden sei  $f(t) = 0$  für  $t < 0$ . Wir bezeichnen  $t = 0$  als den Einschaltzeitpunkt.
- Definition (Laplace-Transformation)

Die **Laplace-Transformierte**  $F(s)$  zur Funktion  $f(t)$  ist

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt.$$

Schreibweise:  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$  oder  $F(s) \bullet \dashv \circ f(t)$ .

Paare von Funktionen  $f(t)$  und  $F(s)$  mit  $f(t) \circ \dashv \bullet F(s)$  heißen **Korrespondenzen**. Dabei wird  $f(t)$  als *Zeitfunktion* oder *Originalfunktion* bezeichnet;  $F(s)$  wird *Bildfunktion* genannt.

- Schematische Skizze.
- Anmerkung:
  1. Allgemein ist  $s \in \mathbb{C}$ . Wir haben im folgenden meistens  $s \in \mathbb{R}$ .
  2. Das Integral existiert nur unter bestimmten Bedingungen an die Funktion  $f$  (unter anderem: nicht „zu starkes Wachstum“ für  $t \rightarrow \infty$ ).
  3. Die Laplace-Transformation bildet die Mengen der Original- und der Bildfunktionen **eineindeutig** aufeinander ab.
  4. Problemstellung der **Rücktransformation**: Gegeben ist  $F(s)$ . Gesucht ist das eindeutig existierende  $f(t)$ , so daß  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ .  
Schreibweise:  $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ .
- Beispiel:  $f(t) = 1$  für  $t \geq 0$ .
- Beispiel:  $f(t) = t$  für  $t \geq 0$ .
- Beispiel:  $f(t) = e^{at}$  für  $t \geq 0$  mit  $a$  konstant.

- Satz (**Linearitätssatz**)

Es gilt

1.  $\mathcal{L}\{k \cdot f(t)\} = k \cdot \mathcal{L}\{f(t)\}$ , mit  $k$  konstant;
2.  $\mathcal{L}\{f(t) + g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} + \mathcal{L}\{g(t)\}$ .

- Anmerkung: Zusammenfassend geschrieben heißt das

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a \mathcal{L}\{f(t)\} + b \mathcal{L}\{g(t)\}$$

mit Konstanten  $a$  und  $b$ .

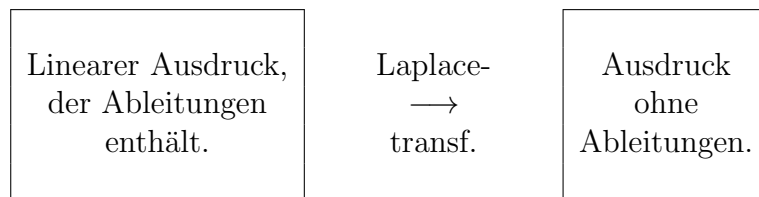
- Satz (**Differentiationssatz**)

Es gilt

1.  $\mathcal{L}\{f'(t)\} = s \cdot \mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$ ,
2.  $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2 \cdot \mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$ ,
3.  $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n \mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$ .

- Beweise und Beispiele.

- Anmerkung: Für die praktischen Anwendungen der Laplace-Transformation sind der Linearitäts- und der Differentiationssatz die entscheidenden Grundlagen.



Ein linearer Ausdruck wird transformiert und im Bildraum bearbeitet, weil er dort eine einfachere Darstellung hat. Das Ergebnis wird in den Originalraum zurücktransformiert.

- Satz (Einige Korrespondenzen der Laplace-Transformation)

Es gilt:

$1 \circ \bullet \frac{1}{s}$	$e^{at} \circ \bullet \frac{1}{s-a}$
$t \circ \bullet \frac{1}{s^2}$	$\sin(\omega t) \circ \bullet \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$t^n \circ \bullet \frac{n!}{s^{n+1}}$	$\cos(\omega t) \circ \bullet \frac{s}{s^2 + \omega^2}$

- Beweis