Doppelintegrale mit Polarkoordinaten

Aufgabe 1.
Die Funktion $f = f(r, \varphi) = r^2\varphi$ sei mit den Polarkoordinaten r und φ gegeben. Berechnen Sie das Doppelintegral

$$\int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{r=0}^{2} f(r, \varphi)\, r\, dr\, d\varphi.$$

Aufgabe 2.
Die Teilmenge G der xy-Ebene sei mit Polarkoordinaten gegeben als

$$G = \{(r, \varphi) \,|\, 0 \le \varphi < 2\pi \text{ und } 1 \le r \le 2\}\,.$$

Ferner sei $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Schreiben Sie f in Polarkoordinaten um, und berechnen Sie dann das Doppelintegral

$$\iint\limits_{G} f(x, y)\, dG\,.$$

Aufgabe 3.
Eine ebene Fläche sei in Polarkoordinaten gegeben durch alle Punkte mit $0 \le \varphi \le \pi$ und $1 \le r \le 2 - \varphi/\pi$. Zeichnen Sie eine Skizze, und berechnen Sie dann den Flächeninhalt mit Hilfe eines Doppelintegrals.

Aufgabe 4.
Ein zylindrischer Körper sei mit Polarkoordinaten gegeben durch die Grundfläche

$$G = \left\{(r, \varphi) \,|\, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \text{ und } 1 \le r \le 2 + \frac{2}{\pi}\,\varphi\right\}$$

sowie die Deckfläche $z = f(r, \varphi) = 8\varphi^2/r$. Berechnen Sie sein Volumen mit einem Doppelintegral.