Ebene und räumliche Kurven

Aufgabe 1.
Berechnen Sie zu den folgenden Kurven $\vec{r}(t)$ jeweils die erste und zweite Ableitung für die gegebenen Werte von t.

a) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 5t^2 \\ 2e^{-0,5t} \end{pmatrix}; \quad t = 0$

b) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2\sin(3t) \\ \cos(3t) \\ t^4 - 5t \end{pmatrix}; \quad t = \pi$

Aufgabe 2.
Die Bahnkurve eines Massenpunktes sei gegeben durch

$$\vec{r}(t) = (t\cos t)\,\vec{e}_x + (t\sin t)\,\vec{e}_y + t\,\vec{e}_z\,.$$

a) Die Kurve verläuft auf der Oberfläche eines bestimmten Körpers. Welcher Körper ist das? Hinweis: Es ist eventuell hilfreich, zunächst die ebene Kurve

$$\vec{u}(t) = (t\cos t)\,\vec{e}_x + (t\sin t)\,\vec{e}_y$$

zu skizzieren.
b) Berechnen Sie zu $\vec{r}(t)$ den Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor sowie den Betrag der Geschwindigkeit.

Aufgabe 3.
Die Normalparabel $y = x^2$ wird im Intervall $-1 \le x \le 1$ betrachtet.
a) Beschreiben Sie den Graph durch einen parameterabhängigen Ortsvektor.
b) Berechnen Sie den Tangentenvektor $\dot{\vec{r}}$ und den Tangenteneinheitsvektor $\vec{T}$.
c) Berechnen Sie $\vec{T}$ für die Parabelpunkte $(0\,|\,0)$ und $(1\,|\,1)$. Zeichnen Sie eine Skizze mit der Parabel und diesen beiden Vektoren.

Aufgabe 4.
Berechnen Sie zu der Schraubenlinie

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 3\cos(2t) \\ 3\sin(2t) \\ 8t \end{pmatrix}$$

die Vektoren des begleitenden Dreibeins.