

Gradient, Richtungsableitung

Aufgabe 1.

Die Funktion $z = f(x, y) = (x^2 + y^2)/4$ sei gegeben.

- Zeichnen Sie ein Diagramm mit den Höhenlinien $z = 1/4$ und $z = 1$ von f .
- Berechnen Sie den Gradienten $\text{grad}(f)$ von f und dessen Betrag.
- Zeichnen Sie in das Höhenliniendiagramm an mehreren Stellen den zugehörigen Gradientenvektor ein, zum Beispiel auf der Höhenlinie $z = 1/4$ in den Punkten $(1 | 0)$, $(1/\sqrt{2} | 1/\sqrt{2})$, $(0 | 1)$ u.s.w., auf der Höhenlinie $z = 1$ in $(2 | 0)$, $(2/\sqrt{2} | 2/\sqrt{2})$, $(0 | 2)$ u.s.w.

Aufgabe 2.

Im folgenden sind zwei ebene Skalarfelder $\phi = \phi(x, y)$ sowie zwei räumliche Skalarfelder $\phi = \phi(x, y, z)$ gegeben. Berechnen Sie die Gradienten $\nabla\phi$ an den vorgegebenen Stellen (x_0, y_0) bzw. (x_0, y_0, z_0) .

- $\phi(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, $(x_0, y_0) = (1, 3)$
- $\phi(x, y) = x^2 e^{-5y}$, $(x_0, y_0) = (2, 0)$
- $\phi(x, y, z) = x^3 - 2yz + z^2$, $(x_0, y_0, z_0) = (1, 3, -2)$
- $\phi(x, y, z) = x\sqrt{y^2 + z^2}$, $(x_0, y_0, z_0) = (3, -2, 0)$

Aufgabe 3.

Berechnen Sie die Richtungsableitung von f an der Stelle P in Richtung von \vec{v} , d.h. berechnen Sie $\partial f / \partial \vec{e}$ an P mit $\vec{e} = \vec{v}/|\vec{v}|$.

- $f(x, y) = x^2 + xy - 3y^2$, $P = (2, 1)$, $\vec{v} = (4, 3)$
- $f(x, y, z) = x^2 \sin y + x^3 z + 2z^2$, $P = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (4, 12, 3)$

Aufgabe 4.

Die Kurve der impliziten Funktion $F(x, y) = 2x^3 + y^3 - 5xy = 0$ kann als Höhenlinie $z = 0$ von $z = F(x, y)$ aufgefaßt werden. Da Gradienten senkrecht auf Höhenlinien stehen, muß der Gradient von F an der Stelle $(1 | 2)$ dort senkrecht auf der Kurve von $F(x, y) = 0$ stehen.

- Berechnen Sie den Gradienten von F an der Stelle $(1 | 2)$.
- Leiten Sie damit die Gleichung der Tangente her, die im Punkt $(1 | 2)$ die Kurve berührt. (Analog zur Herleitung der Gleichung einer Tangentialebene aus einem Normalenvektor.)

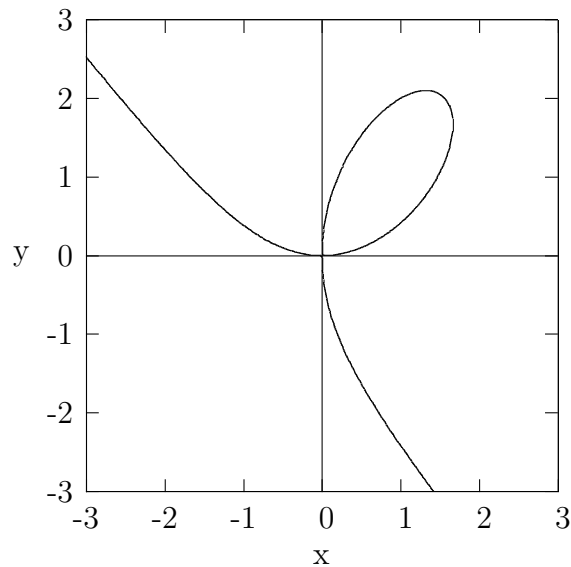


Abbildung 1: Kurve der Funktion $F(x, y) = 2x^3 + y^3 - 5xy = 0$

Aufgabe 5.

Berechnen Sie die größte Steigung von f an der Stelle (x_0, y_0) , und geben Sie die Richtung an, in der diese Steigung auftritt.

- a) $f(x, y) = x^2y - y^3$, $(x_0, y_0) = (3, -1)$
- b) $f(x, y) = x^2y - \sin(1 + y)$, $(x_0, y_0) = (3, -1)$
- c) $f(x, y, z) = 3x^2 + 2(y^2 - z^3)$, $(x_0, y_0, z_0) = (2, -3, -1)$
- d) $f(x, y, z) = e^{x^2+y^2-z^2}$, $(x_0, y_0, z_0) = (3, 4, 5)$

Aufgabe 6.

Im folgenden sind durch $F(x, y) = c$ Kurven in der Ebene und durch $F(x, y, z) = c$ Flächen im Raum gegeben.

Berechnen Sie für den jeweils angegebenen Punkt mit Hilfe eines Gradienten die Gleichung der Tangente an die Kurve bzw. die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche.

- a) $x^2 - y^2 = 3$, $(x_0, y_0) = (2, 1)$
- b) $x^2 + xy - y^2 = -1$, $(x_0, y_0) = (3, 5)$
- c) $x^2 + y^2 - z^2 = 4$, $(x_0, y_0, z_0) = (1, 2, 3)$
- d) $e^{x^2+y^2-z^2} = 1$, $(x_0, y_0, z_0) = (3, 4, 5)$