Vektorfelder, Divergenz

Aufgabe 1.
Skizzieren Sie die folgenden Vektorfelder $\vec{F}$, indem Sie jeweils einige typische Vektoren zeichnen. Verwenden Sie beispielsweise sowohl für x als auch für y den Bereich von -2 bis 2, und zeichnen Sie die Vektoren von $\vec{F}$ an allen Punkten mit ganzzahligen Koordinaten.

a) $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ x/4 \end{pmatrix}$ b) $\vec{F} = \begin{pmatrix} x/4 \\ -y/4 \end{pmatrix}$ c) $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ (x+y)/4 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2.
Berechnen Sie die Divergenz div $\vec{F}$ der gegebenen Vektorfelder $\vec{F}$.

a) $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ x/4 \end{pmatrix}$ b) $\vec{F} = \begin{pmatrix} x/4 \\ -y/4 \end{pmatrix}$ c) $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ (x+y)/4 \end{pmatrix}$

d) $\vec{F} = \begin{pmatrix} -2x^2y \\ 7xy \\ 5 \end{pmatrix}$ e) $\vec{F} = \begin{pmatrix} x-y \\ y-z \\ x-z \end{pmatrix}$ f) $\vec{F} = \begin{pmatrix} \sin x + \cos y \\ \cos y - \sin z \\ x^2+y^2+z^2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3.
Die Divergenz $\nabla\vec{F}$ von Vektorfeldern $\vec{F}$ soll an vorgegebenen Stellen berechnet werden.

a) $\vec{F} = M\vec{e}_x + N\vec{e}_y$ mit $M = M(x,y) = xe^y$ und $N = N(x,y) = x\sin y$.
Bestimmen Sie $\nabla\vec{F}(0,0)$ sowie $\nabla\vec{F}(3,0)$.

b) $\vec{F} = P\vec{e}_x + Q\vec{e}_y + R\vec{e}_z$ mit $P = P(x,y,z) = xy^2$ und $Q = Q(x,y,z) = xy^2z$ sowie $R = R(x,y,z) = x + 2y + 3z$.
Geben Sie $\nabla\vec{F}(1,2,-3)$ und $\nabla\vec{F}(1,1,-2)$ an.

Aufgabe 4.
Das ebene Vektorfeld $\vec{F} = M\vec{e}_x + N\vec{e}_y$ mit $M = M(x,y) = 0,5\,x^2 + 2x$ sowie $N = N(x,y) = y^2$ sei gegeben. An welchen Stellen hat es Quellen, wo hat es Senken, und wo ist es quellen- und senkenfrei?

Aufgabe 5.
Was muß für die reelle Konstante a gelten, damit das räumliche Vektorfeld

$$\vec{F} = \frac{1}{r^a} \frac{\vec{r}}{|\,\vec{r}\,|} \qquad \text{mit} \qquad r = |\,\vec{r}\,| \qquad \text{und} \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

für $r > 0$ weder Quellen noch Senken hat, seine Divergenz also gleich Null ist?

Aufgabe 6.
Untersucht werden soll das räumliche Zentralfeld

$$\vec{F} = g(r) \frac{\vec{r}}{|\,\vec{r}\,|} \qquad \text{mit} \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Die Funktion g hängt dabei nur vom Abstand $r = |\,\vec{r}\,|$ zum Ursprung ab, und die Richtung von $\vec{F}$ ist radial nach außen oder innen, je nach dem Vorzeichen von g. Mit der Abkürzung $f(r)$ für $g(r)/|\,\vec{r}\,| = g(r)/r$ kann man $\vec{F}$ als

$$\vec{F} = f(r)\,\vec{r}$$

schreiben.

Was muß für die Funktion $f(r)$ gelten, damit das Vektorfeld für $r > 0$ weder Quellen noch Senken hat, seine Divergenz also gleich Null ist? (Bei den Rechnungen darf angenommen werden, daß die Funktion f differenzierbar ist.)