Rotation

Aufgabe 1.
Berechnen Sie die Rotation $\operatorname{rot}\vec{F}$ der gegebenen Vektorfelder $\vec{F}$.

a) $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ x/4 \end{pmatrix}$ b) $\vec{F} = \begin{pmatrix} x/4 \\ -y/4 \end{pmatrix}$ c) $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ (x+y)/4 \end{pmatrix}$

d) $\vec{F} = \begin{pmatrix} -2x^2y \\ 7xy \\ 5 \end{pmatrix}$ e) $\vec{F} = \begin{pmatrix} x-y \\ y-z \\ x-z \end{pmatrix}$ f) $\vec{F} = \begin{pmatrix} \sin x + \cos y \\ \cos y - \sin z \\ x^2+y^2+z^2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2.
Berechnen Sie die Rotation $\operatorname{rot}\vec{F}$ der Vektorfelder $\vec{F}$ an den vorgegebenen Stellen.

a) $\vec{F} = \begin{pmatrix} x^2y \\ xy^3 \end{pmatrix}$; $(x_0, y_0) = (1, 1)$; $(x_1, y_1) = (2, 2)$.

b) $\vec{F} = \begin{pmatrix} x^2y \\ xyz \\ x^2+yz \end{pmatrix}$; $(x_0, y_0, z_0) = (1, 2, 3)$; $(x_1, y_1, z_1) = (0, 5, 0)$.

Aufgabe 3.
Zeigen Sie, daß das ebene Vektorfeld $\vec{F} = M\vec{e}_x + N\vec{e}_y$ mit den beiden Komponenten $M = M(x, y) = x/\sqrt{x^2+y^2}$ sowie $N = N(x, y) = y/\sqrt{x^2+y^2}$ wirbelfrei ist.

Aufgabe 4.
Untersucht werden soll das Feld

$$\vec{F} = \frac{1}{r^a}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, \qquad a \text{ konstant}, \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}$$

für $r > 0$.

Im Fall $a = 2$ handelt es sich, abgesehen von einem konstanten Faktor, um das Magnetfeld eines langen stromdurchflossenen Drahtes, und es gilt $\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{0}$ an jeder Stelle mit $r > 0$.

Was kann man über die Rotation $\operatorname{rot}\vec{F}$ in Abhängigkeit von a sagen? Für welche Werte von a gibt es Wirbel? An welchen Stellen (x, y) treten sie auf? Hängt die Drehrichtung der Wirbel mit a zusammen?

Aufgabe 5.
Untersucht werden soll das zur z-Achse rotationssymmetrische Vektorfeld

$$\vec{H} = g(r)\,\frac{\vec{s}}{|\,\vec{s}\,|} \qquad \text{mit} \qquad \vec{s} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad r = |\,\vec{s}\,| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Die Funktion g hängt dabei nur vom Abstand r zur z-Achse ab. Mit der Abkürzung $h(r)$ für $g(r)/|\,\vec{s}\,| = g(r)/r$ kann man $\vec{H}$ als

$$\vec{H} = h(r)\,\vec{s}$$

schreiben.

Was muß für die Funktion $h(r)$ gelten, damit das Vektorfeld für $r > 0$ wirbelfrei ist, seine Rotation also gleich Null ist? (Bei den Rechnungen darf angenommen werden, daß die Funktion h differenzierbar ist.)

Aufgabe 6.
Zeigen Sie, daß das räumliche Zentralfeld

$$\vec{F} = f(r)\,\vec{r} \qquad \text{mit} \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad r = |\,\vec{r}\,| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

für beliebige differenzierbare Funktionen f wirbelfrei ist.

Zeigen Sie ferner, daß das zur z-Achse rotationssymmetrische Vektorfeld

$$\vec{H} = h(r)\,\vec{s} \qquad \text{mit} \qquad \vec{s} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad r = |\,\vec{s}\,| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

für beliebige differenzierbare Funktionen h quellen- und senkenfrei ist.