

## Konservative Vektorfelder

### Aufgabe 1.

Überprüfen Sie, welche der folgenden Vektorfelder  $\vec{F}$  konservativ sind, und bestimmen Sie deren Potentiale.

a)  $\vec{F} = \begin{pmatrix} 2 \\ x \end{pmatrix}$       b)  $\vec{F} = \begin{pmatrix} x/4 \\ -y/4 \end{pmatrix}$       c)  $\vec{F} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

d)  $\vec{F} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$       e)  $\vec{F} = \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix}$       f)  $\vec{F} = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$

### Aufgabe 2.

Das Vektorfeld  $\vec{F} = M\vec{e}_x + N\vec{e}_y$  mit  $M(x, y) = y^2$  und  $N(x, y) = 2xy$  sei gegeben.

a) Zeigen Sie, daß  $\vec{F}$  konservativ ist.

b) Berechnen Sie das Potential zu  $\vec{F}$ .

c) Welchen Wert hat das Linienintegral  $\int_C \vec{F} d\vec{r}$  für einen beliebigen Weg  $C$  vom Anfangspunkt  $(1, -1)$  bis zum Endpunkt  $(3, 2)$  ?

### Aufgabe 3.

Zeigen Sie, daß das Linienintegral

$$\int_C \cos(y) dx - x \sin(y) dy$$

wegunabhängig ist, und berechnen Sie den Wert des Integrals für eine Kurve  $C$ , die den Anfangspunkt  $(0, 0)$  und den Endpunkt  $(2, \pi)$  hat.

### Aufgabe 4.

Für welchen Wert der Konstanten  $a$  ist das Vektorfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} axy + y \\ 3x^2 + x \\ 2z \end{pmatrix}$$

konservativ? Berechnen Sie für diesen Fall das Linienintegral  $\int_C \vec{F} d\vec{r}$  längs eines beliebigen Weges  $C$ , der vom Anfangspunkt  $(0, 0, 4)$  bis zum Endpunkt  $(2, 1, 3)$  führt.