

Vektorfelder, Divergenz

Aufgabe 1.

Skizzieren Sie die folgenden Vektorfelder \vec{F} , indem Sie jeweils einige typische Vektoren zeichnen. Verwenden Sie beispielsweise sowohl für x als auch für y den Bereich von -2 bis 2 , und zeichnen Sie die Vektoren von \vec{F} an allen Punkten mit ganzzahligen Koordinaten.

a) $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ x/4 \end{pmatrix}$ b) $\vec{F} = \begin{pmatrix} x/4 \\ -y/4 \end{pmatrix}$ c) $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ (x+y)/4 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2.

Berechnen Sie die Divergenz $\operatorname{div} \vec{F}$ der gegebenen Vektorfelder \vec{F} .

a) $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ x/4 \end{pmatrix}$ b) $\vec{F} = \begin{pmatrix} x/4 \\ -y/4 \end{pmatrix}$ c) $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ (x+y)/4 \end{pmatrix}$
d) $\vec{F} = \begin{pmatrix} -2x^2y \\ 7xy \\ 5 \end{pmatrix}$ e) $\vec{F} = \begin{pmatrix} x-y \\ y-z \\ x-z \end{pmatrix}$ f) $\vec{F} = \begin{pmatrix} \sin x + \cos y \\ \cos y - \sin z \\ x^2 + y^2 + z^2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3.

Die Divergenz $\nabla \vec{F}$ von Vektorfeldern \vec{F} soll an vorgegebenen Stellen berechnet werden.

a) $\vec{F} = M\vec{e}_x + N\vec{e}_y$ mit $M = M(x, y) = xe^y$ und $N = N(x, y) = x \sin y$.

Bestimmen Sie $\nabla \vec{F}(0, 0)$ sowie $\nabla \vec{F}(3, 0)$.

b) $\vec{F} = P\vec{e}_x + Q\vec{e}_y + R\vec{e}_z$ mit $P = P(x, y, z) = xy^2$ und $Q = Q(x, y, z) = xy^2z$
sowie $R = R(x, y, z) = x + 2y + 3z$.

Geben Sie $\nabla \vec{F}(1, 2, -3)$ und $\nabla \vec{F}(1, 1, -2)$ an.

Aufgabe 4.

Das ebene Vektorfeld $\vec{F} = M\vec{e}_x + N\vec{e}_y$ mit $M = M(x, y) = 0,5x^2 + 2x$ sowie $N = N(x, y) = y^2$ sei gegeben. An welchen Stellen hat es Quellen, wo hat es Senken, und wo ist es quellen- und senkenfrei?

Aufgabe 5.

Was muß für die reelle Konstante a gelten, damit das räumliche Vektorfeld

$$\vec{F} = \frac{1}{r^a} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad \text{mit} \quad r = |\vec{r}| \quad \text{und} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

für $r > 0$ weder Quellen noch Senken hat, seine Divergenz also gleich Null ist?

Aufgabe 6.

Untersucht werden soll das räumliche Zentralfeld

$$\vec{F} = g(r) \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad \text{mit} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Die Funktion g hängt dabei nur vom Abstand $r = |\vec{r}|$ zum Ursprung ab, und die Richtung von \vec{F} ist radial nach außen oder innen, je nach dem Vorzeichen von g . Mit der Abkürzung $f(r)$ für $g(r)/|\vec{r}| = g(r)/r$ kann man \vec{F} als

$$\vec{F} = f(r) \vec{r}$$

schreiben.

Was muß für die Funktion $f(r)$ gelten, damit das Vektorfeld für $r > 0$ weder Quellen noch Senken hat, seine Divergenz also gleich Null ist? (Bei den Rechnungen darf angenommen werden, daß die Funktion f differenzierbar ist.)