Linienintegrale

Aufgabe 1.
Das Linienintegral $\int_C \vec{F}\,d\vec{r}$ soll mit den folgenden Vektorfeldern $\vec{F}$ und den durch $\vec{r}(t)$ gegebenen Kurven C berechnet werden.

a) $\vec{F} = \begin{pmatrix} xy \\ x+y \end{pmatrix}$ und $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t \\ 2t-1 \end{pmatrix}$ mit $-1 \le t \le 1$.

b) $\vec{F} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-z \\ z-y \end{pmatrix}$ und $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$ mit $0 \le t \le 2$.

Aufgabe 2.
Berechnen Sie für das Vektorfeld $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ x/4 \end{pmatrix}$ das Linienintegral $\int_C \vec{F}\,d\vec{r}$ auf zwei verschiedenen Wegen, die beide von $(0,0)$ nach $(1,1)$ führen.

1. Es sei C_1 die gerade Strecke von $(0,0)$ nach $(1,1)$.
2. Es sei C_2 der Teil der Parabel $y = x^2$ von $(0,0)$ bis $(1,1)$.
3. Welchen Wert hat das Linienintegral $\oint_C \vec{F}\,d\vec{r}$ über die geschlossene Kurve C mit $C = C_2 - C_1$?

Aufgabe 3.
Es sei $\vec{F}$ das Gradientenfeld der Funktion $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$. Berechnen Sie das Linienintegral $\int_C \vec{F}\,d\vec{r}$, wobei die Kurve C genau eine Windung der Schraubenlinie $\vec{r}(t) = 3\cos(2t)\,\vec{e}_x + 3\sin(2t)\,\vec{e}_y + 8t\,\vec{e}_z$ beginnend bei $t = 0$ ist.

Aufgabe 4.
Berechnen Sie das Linienintegral $\int_C \vec{F}\,d\vec{r}$ mit den folgenden Vektorfeldern $\vec{F}$ und Kurven C.
a) $\vec{F} = M\vec{e}_x + N\vec{e}_y$ mit $M(x,y) = y^2$ und $N(x,y) = x$. Die Kurve C ist derjenige Teil des Graphen von $y = x^3$, welcher im Punkt $(-1,-1)$ beginnt und im Punkt $(1,1)$ endet.
b) $\vec{F} = P\vec{e}_x + Q\vec{e}_y + R\vec{e}_z$ mit $P(x,y,z) = y^2$ sowie $Q(x,y,z) = xz$ und $R(x,y,z) = xyz^2$. Die Kurve C führt geradlinig von $(0,0,0)$ nach $(3,1,0)$ und von dort geradlinig nach $(3,1,2)$.