Doppelintegrale mit kartesischen Koordinaten

Aufgabe 1.
Berechnen Sie das Integral

$$\int_{y=0}^{\pi/2} \int_{x=0}^{6} (x^2 + x\cos y)\,dx\,dy.$$

Aufgabe 2.
Die Funktion $z = (1-x)e^y$ soll für $0 \le x \le 1$ und $-1 \le y \le 1$ betrachtet werden.

1. Zeichnen Sie eine Skizze.
2. Berechnen Sie das Volumen zwischen der Funktionsfläche und der xy-Ebene.
3. Schätzen Sie mit Hilfe der Skizze das Volumen nach unten und nach oben ab. Vergleichen Sie die Abschätzung mit dem Integrationsergebnis.

Aufgabe 3.
Die Menge $G = \{(x,y) \,|\, 0 \le x \le 1 \text{ und } x \le y \le \sqrt{x}\}$ ist ein kartesischer Normalbereich sowohl bezüglich der x- als auch der y-Achse. Das Integral

$$\iint\limits_G xy\,dG$$

kann also auf zwei Arten berechnet werden. Führen Sie beide Rechnungen durch.

Aufgabe 4.
Setzen Sie für die folgenden Integrationsbereiche G die Grenzen in das Doppelintegral

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dG$$

ein, und schreiben Sie dG passend um, also als $dx\,dy$ oder als $dy\,dx$. Ist G sowohl ein kartesischer Normalbereich bezüglich der x- als auch der y-Achse, dann schreiben Sie beide Möglichkeiten auf. Skizzieren Sie die Mengen G.

1. $G = \{(x,y) \,|\, 0 \le x \le 5 \text{ und } -2 \le y \le x\}$
2. $G = \{(x,y) \,|\, -1 \le x \le 2 \text{ und } -3 \le y \le x^2\}$
3. $G = \{(x,y) \,|\, 0 \le x \le 2 - \cos y \text{ und } -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}\}$