

Dreifachintegrale

Aufgabe 1.

Berechnen Sie das Dreifachintegral

$$\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{\pi} \int_{z=1}^e \frac{x}{z} \cos(xy) dz dy dx.$$

Aufgabe 2.

Ein Zylinder sei symmetrisch zur z -Achse gegeben durch $0 \leq r \leq a$ und $0 \leq z \leq h$.

1. Wie groß ist die Masse des Zylinders, wenn seine Dichte $\delta = \delta(x, y, z) = z$ ist?
2. Wo liegt der Schwerpunkt des Zylinders?

Verwenden Sie für die Berechnungen Dreifachintegrale und Zylinderkoordinaten.

Aufgabe 3.

Eine Kugel mit dem Mittelpunkt im Ursprung des Koordinatensystems und mit dem Radius a habe die Dichte $\delta = e^{-r^3}$, wobei r der Abstand vom Ursprung ist. Berechnen Sie die Masse der Kugel. Verwenden Sie dabei ein Dreifachintegral und Kugelkoordinaten.

Aufgabe 4.

Ein zur z -Achse symmetrischer Rotationsparaboloid sei durch $ar^2 \leq z \leq b$ gegeben. Der Körper soll homogen sein, seine Dichte kann als $\delta = 1$ angenommen werden. Wie groß ist das Trägheitsmoment des Körpers bezüglich Rotation um die z -Achse?