# Gradient, Richtungsableitung

**Aufgabe 1.**
Die Funktion $z = f(x, y) = (x^2 + y^2)/4$ sei gegeben.
a) Zeichnen Sie ein Diagramm mit den Höhenlinien $z = 1/4$ und $z = 1$ von $f$.
b) Berechnen Sie den Gradienten $\text{grad}(f)$ von $f$ und dessen Betrag.
c) Zeichnen Sie in das Höhenliniendiagramm an mehreren Stellen den zugehörigen Gradientenvektor ein, zum Beispiel auf der Höhenlinie $z = 1/4$ in den Punkten $(1\,|\,0)$, $(1/\sqrt{2}\,|\,1/\sqrt{2})$, $(0\,|\,1)$ u.s.w., auf der Höhenlinie $z = 1$ in $(2\,|\,0)$, $(2/\sqrt{2}\,|\,2/\sqrt{2})$, $(0\,|\,2)$ u.s.w.

**Aufgabe 2.**
Im folgenden sind zwei ebene Skalarfelder $\phi = \phi(x, y)$ sowie zwei räumliche Skalarfelder $\phi = \phi(x, y, z)$ gegeben. Berechnen Sie die Gradienten $\nabla\phi$ an den vorgegebenen Stellen $(x_0, y_0)$ bzw. $(x_0, y_0, z_0)$.

a) $\phi(x, y) = \ln(x^2 + y^2), \qquad (x_0, y_0) = (1, 3)$

b) $\phi(x, y) = x^2 e^{-5y}, \qquad (x_0, y_0) = (2, 0)$

c) $\phi(x, y, z) = x^3 - 2yz + z^2, \qquad (x_0, y_0, z_0) = (1, 3, -2)$

d) $\phi(x, y, z) = x\sqrt{y^2 + z^2}, \qquad (x_0, y_0, z_0) = (3, -2, 0)$

**Aufgabe 3.**
Berechnen Sie die Richtungsableitung von $f$ an der Stelle $P$ in Richtung von $\vec{v}$, d.h. berechnen Sie $\partial f/\partial\vec{e}$ an $P$ mit $\vec{e} = \vec{v}/|\vec{v}|$.

a) $f(x, y) = x^2 + xy - 3y^2, \quad P = (2, 1), \quad \vec{v} = (4, 3)$

b) $f(x, y, z) = x^2 \sin y + x^3 z + 2z^2, \quad P = (1, 0, 1), \quad \vec{v} = (4, 12, 3)$

**Aufgabe 4.**
Die Kurve der impliziten Funktion $F(x, y) = 2x^3 + y^3 - 5xy = 0$ kann als Höhenlinie $z = 0$ von $z = F(x, y)$ aufgefaßt werden. Da Gradienten senkrecht auf Höhenlinien stehen, muß der Gradient von $F$ an der Stelle $(1\,|\,2)$ dort senkrecht auf der Kurve von $F(x, y) = 0$ stehen.
a) Berechnen Sie den Gradienten von $F$ an der Stelle $(1\,|\,2)$.
b) Leiten Sie damit die Gleichung der Tangente her, die im Punkt $(1\,|\,2)$ die Kurve berührt. (Analog zur Herleitung der Gleichung einer Tangentialebene aus einem Normalenvektor.)

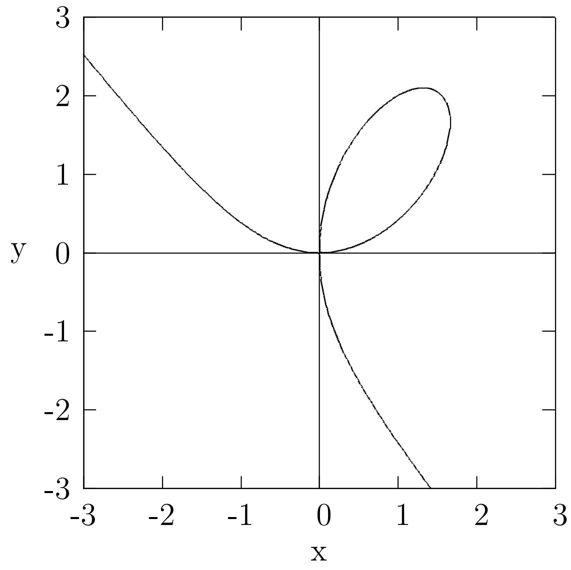


Abbildung 1: Kurve der Funktion $F(x, y) = 2x^3 + y^3 - 5xy = 0$

**Aufgabe 5.**
Berechnen Sie die größte Steigung von $f$ an der Stelle $(x_0, y_0)$, und geben Sie die Richtung an, in der diese Steigung auftritt.

a) $f(x, y) = x^2 y - y^3$, $\quad (x_0, y_0) = (3, -1)$

b) $f(x, y) = x^2 y - \sin(1 + y)$, $\quad (x_0, y_0) = (3, -1)$

c) $f(x, y, z) = 3x^2 + 2(y^2 - z^3)$, $\quad (x_0, y_0, z_0) = (2, -3, -1)$

d) $f(x, y, z) = e^{x^2+y^2-z^2}$, $\quad (x_0, y_0, z_0) = (3, 4, 5)$

**Aufgabe 6.**
Im folgenden sind durch $F(x, y) = c$ Kurven in der Ebene und durch $F(x, y, z) = c$ Flächen im Raum gegeben.

Berechnen Sie für den jeweils angegebenen Punkt mit Hilfe eines Gradienten die Gleichung der Tangente an die Kurve bzw. die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche.

a) $x^2 - y^2 = 3$, $\quad (x_0, y_0) = (2, 1)$

b) $x^2 + xy - y^2 = -1$, $\quad (x_0, y_0) = (3, 5)$

c) $x^2 + y^2 - z^2 = 4$, $\quad (x_0, y_0, z_0) = (1, 2, 3)$

d) $e^{x^2+y^2-z^2} = 1$, $\quad (x_0, y_0, z_0) = (3, 4, 5)$