

## Rotation

### Aufgabe 1.

Berechnen Sie die Rotation  $\operatorname{rot} \vec{F}$  der gegebenen Vektorfelder  $\vec{F}$ .

a)  $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ x/4 \end{pmatrix}$     b)  $\vec{F} = \begin{pmatrix} x/4 \\ -y/4 \end{pmatrix}$     c)  $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ (x+y)/4 \end{pmatrix}$

d)  $\vec{F} = \begin{pmatrix} -2x^2y \\ 7xy \\ 5 \end{pmatrix}$     e)  $\vec{F} = \begin{pmatrix} x-y \\ y-z \\ x-z \end{pmatrix}$     f)  $\vec{F} = \begin{pmatrix} \sin x + \cos y \\ \cos y - \sin z \\ x^2 + y^2 + z^2 \end{pmatrix}$

### Aufgabe 2.

Berechnen Sie die Rotation  $\operatorname{rot} \vec{F}$  der Vektorfelder  $\vec{F}$  an den vorgegebenen Stellen.

a)  $\vec{F} = \begin{pmatrix} x^2y \\ xy^3 \end{pmatrix}$ ;     $(x_0, y_0) = (1, 1)$ ;     $(x_1, y_1) = (2, 2)$ .

b)  $\vec{F} = \begin{pmatrix} x^2y \\ xyz \\ x^2 + yz \end{pmatrix}$ ;     $(x_0, y_0, z_0) = (1, 2, 3)$ ;     $(x_1, y_1, z_1) = (0, 5, 0)$ .

### Aufgabe 3.

Zeigen Sie, daß das ebene Vektorfeld  $\vec{F} = M\vec{e}_x + N\vec{e}_y$  mit den beiden Komponenten  $M = M(x, y) = x/\sqrt{x^2 + y^2}$  sowie  $N = N(x, y) = y/\sqrt{x^2 + y^2}$  wirbelfrei ist.

### Aufgabe 4.

Untersucht werden soll das Feld

$$\vec{F} = \frac{1}{r^a} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, \quad a \text{ konstant}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

für  $r > 0$ .

Im Fall  $a = 2$  handelt es sich, abgesehen von einem konstanten Faktor, um das Magnetfeld eines langen stromdurchflossenen Drahtes, und es gilt  $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}$  an jeder Stelle mit  $r > 0$ .

Was kann man über die Rotation  $\operatorname{rot} \vec{F}$  in Abhängigkeit von  $a$  sagen? Für welche Werte von  $a$  gibt es Wirbel? An welchen Stellen  $(x, y)$  treten sie auf? Hängt die Drehrichtung der Wirbel mit  $a$  zusammen?

**Aufgabe 5.**

Untersucht werden soll das zur  $z$ -Achse rotationssymmetrische Vektorfeld

$$\vec{H} = g(r) \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|} \quad \text{mit} \quad \vec{s} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad r = |\vec{s}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Die Funktion  $g$  hängt dabei nur vom Abstand  $r$  zur  $z$ -Achse ab. Mit der Abkürzung  $h(r)$  für  $g(r)/|\vec{s}| = g(r)/r$  kann man  $\vec{H}$  als

$$\vec{H} = h(r) \vec{s}$$

schreiben.

Was muß für die Funktion  $h(r)$  gelten, damit das Vektorfeld für  $r > 0$  wirbelfrei ist, seine Rotation also gleich Null ist? (Bei den Rechnungen darf angenommen werden, daß die Funktion  $h$  differenzierbar ist.)

**Aufgabe 6.**

Zeigen Sie, daß das räumliche Zentralfeld

$$\vec{F} = f(r) \vec{r} \quad \text{mit} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

für beliebige differenzierbare Funktionen  $f$  wirbelfrei ist.

Zeigen Sie ferner, daß das zur  $z$ -Achse rotationssymmetrische Vektorfeld

$$\vec{H} = h(r) \vec{s} \quad \text{mit} \quad \vec{s} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad r = |\vec{s}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

für beliebige differenzierbare Funktionen  $h$  quellen- und senkenfrei ist.