

Linienintegrale

Aufgabe 1.

Das Linienintegral $\int_C \vec{F} d\vec{r}$ soll mit den folgenden Vektorfeldern \vec{F} und den durch $\vec{r}(t)$ gegebenen Kurven C berechnet werden.

a) $\vec{F} = \begin{pmatrix} xy \\ x + y \end{pmatrix}$ und $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t \\ 2t - 1 \end{pmatrix}$ mit $-1 \leq t \leq 1$.

b) $\vec{F} = \begin{pmatrix} x + y \\ x - z \\ z - y \end{pmatrix}$ und $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$ mit $0 \leq t \leq 2$.

Aufgabe 2.

Berechnen Sie für das Vektorfeld $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0, 5 \\ x/4 \end{pmatrix}$ das Linienintegral $\int_C \vec{F} d\vec{r}$ auf zwei verschiedenen Wegen, die beide von $(0, 0)$ nach $(1, 1)$ führen.

1. Es sei C_1 die gerade Strecke von $(0, 0)$ nach $(1, 1)$.
2. Es sei C_2 der Teil der Parabel $y = x^2$ von $(0, 0)$ bis $(1, 1)$.
3. Welchen Wert hat das Linienintegral $\oint_C \vec{F} d\vec{r}$ über die geschlossene Kurve C mit $C = C_2 - C_1$?

Aufgabe 3.

Es sei \vec{F} das Gradientenfeld der Funktion $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Berechnen Sie das Linienintegral $\int_C \vec{F} d\vec{r}$, wobei die Kurve C genau eine Windung der Schraubenlinie $\vec{r}(t) = 3 \cos(2t) \vec{e}_x + 3 \sin(2t) \vec{e}_y + 8t \vec{e}_z$ beginnend bei $t = 0$ ist.

Aufgabe 4.

Berechnen Sie das Linienintegral $\int_C \vec{F} d\vec{r}$ mit den folgenden Vektorfeldern \vec{F} und Kurven C .

a) $\vec{F} = M\vec{e}_x + N\vec{e}_y$ mit $M(x, y) = y^2$ und $N(x, y) = x$. Die Kurve C ist derjenige Teil des Graphen von $y = x^3$, welcher im Punkt $(-1, -1)$ beginnt und im Punkt $(1, 1)$ endet.

b) $\vec{F} = P\vec{e}_x + Q\vec{e}_y + R\vec{e}_z$ mit $P(x, y, z) = y^2$ sowie $Q(x, y, z) = xz$ und $R(x, y, z) = xyz^2$. Die Kurve C führt geradlinig von $(0, 0, 0)$ nach $(3, 1, 0)$ und von dort geradlinig nach $(3, 1, 2)$.