

Konservative Vektorfelder

Aufgabe 1.

Überprüfen Sie, welche der folgenden Vektorfelder \vec{F} konservativ sind, und bestimmen Sie deren Potentiale.

a) $\vec{F} = \begin{pmatrix} 2 \\ x \end{pmatrix}$ b) $\vec{F} = \begin{pmatrix} x/4 \\ -y/4 \end{pmatrix}$ c) $\vec{F} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

d) $\vec{F} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ e) $\vec{F} = \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix}$ f) $\vec{F} = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$

Aufgabe 2.

Das Vektorfeld $\vec{F} = M\vec{e}_x + N\vec{e}_y$ mit $M(x, y) = y^2$ und $N(x, y) = 2xy$ sei gegeben.

a) Zeigen Sie, daß \vec{F} konservativ ist.

b) Berechnen Sie das Potential zu \vec{F} .

c) Welchen Wert hat das Linienintegral $\int_C \vec{F} d\vec{r}$ für einen beliebigen Weg C vom Anfangspunkt $(1, -1)$ bis zum Endpunkt $(3, 2)$?

Aufgabe 3.

Zeigen Sie, daß das Linienintegral

$$\int_C \cos(y) dx - x \sin(y) dy$$

wegunabhängig ist, und berechnen Sie den Wert des Integrals für eine Kurve C , die den Anfangspunkt $(0, 0)$ und den Endpunkt $(2, \pi)$ hat.

Aufgabe 4.

Für welchen Wert der Konstanten a ist das Vektorfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} axy + y \\ 3x^2 + x \\ 2z \end{pmatrix}$$

konservativ? Berechnen Sie für diesen Fall das Linienintegral $\int_C \vec{F} d\vec{r}$ längs eines beliebigen Weges C , der vom Anfangspunkt $(0, 0, 4)$ bis zum Endpunkt $(2, 1, 3)$ führt.