Oberflächenintegrale, Satz von Gauß, Satz von Stokes

Aufgabe 1.
Berechnen Sie mit einem Oberflächenintegral den Fluß des Vektorfeldes $\vec{F}$ durch die Fläche $z = f(x, y) = x^2 - y^2$ mit $0 \leq x \leq 2$ und $0 \leq y \leq 3$. Dabei sei $\vec{F} = y\,\vec{e}_x + x\,\vec{e}_y - xz\,\vec{e}_z$. (Die Orientierung der Fläche soll nach oben gewählt werden.)

Aufgabe 2.
Ein Quader mit den gegenüberliegenden Ecken (0|0|0) und (1|6|2) sei gegeben. Berechnen Sie den Fluß des Vektorfeldes $\vec{F} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$ durch die Oberfläche des Quaders auf zwei Arten:

(a) direkt,

(b) mit dem Satz von Gauß.

Hinweis: Bei der direkten Berechnung kann man die Besonderheiten der Problemstellung ausnutzen, für jede Teilfläche $\vec{F} \cdot \vec{n}$ bestimmen, und damit leicht den Fluß durch alle Teilflächen des Quaders bekommen.

Aufgabe 3.
Gegeben sei ein Quader mit gegenüberliegenden Ecken (0|0|0) und (5|3|2). Berechnen Sie für die beiden folgenden Vektorfelder $\vec{F}$ den Fluß $\oiint_S \vec{F}\, d\vec{S}$ durch die geschlossene Oberfläche S des Quaders. Verwenden Sie dabei den Satz von Gauß.

(a) $$\vec{F} = \begin{pmatrix} x(4+z) \\ yz \\ x - z^2 \end{pmatrix}$$

(b) $$\vec{F} = \begin{pmatrix} xyz \\ y - z \\ 3x^2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.
Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{F} = -3y\,\vec{e}_x + (z^2/2)\,\vec{e}_y + 7\,\vec{e}_z$. Ferner sei die oberhalb der xy-Ebene liegende Halbkugel $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ mit $x^2 + y^2 \leq 4$ gegeben (Orientierung nach oben). Gesucht ist der ***Fluß der Rotation*** von $\vec{F}$ durch die Halbkugel. Führen Sie die Berechnung auf mehrere Arten durch:

(a) direkt mit dem Oberflächenintegral;

(b) nach dem Satz von Stokes mit einem Linienintegral über diejenige Kreislinie in der xy-Ebene, die die Halbkugel begrenzt;

(c) nach dem Satz von Stokes (Oberflächenunabhängigkeit) mit einem Flußintegral bezüglich der Kreisfläche in der xy-Ebene.