

Ergänzende Formeln aus der Physik-Vorlesung

2 Mechanik

- 2.1 Kinematik der Linienbewegung
Geschwindigkeit, Beschleunigung
- 2.2 Kinematik der Drehbewegung
- 2.3 Dynamik der geradlinigen Bewegung
Newtonsche Axiome, schiefe Ebene, Reibung, Stöße
- 2.4 Dynamik der Drehbewegung
Massenträgheitsmoment, Corioliskraft, Präzession
- 2.5 Arbeit, Energie, Leistung
- 2.7 Mechanik der Flüssigkeiten und Gase

3 Schwingungen

- 3.1 Begriffe
- 3.2 ungedämpfte elastische Sinusschwingung
Federschwingung, Flüssigkeitsschwingung
Drehschwingung, Pendel, elektrischer Schwingkreis
- 3.3 Viskos gedämpfte Schwingung
- 3.4 Erzwungene Schwingung

2. Mechanik:

2.1 Kinematik der Linienbewegung:

Definitionen der Begriffe:

Geschwindigkeit: momentane:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

mittlere:

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Beschleunigung: momentane:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{s}$$

mittlere:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Fallbeschleunigung auf Erdoberfläche (Normwert)

$$g_n \equiv 9,80665 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

2.2 Kinematik der Drehbewegung:

Anzahl der Umdrehungen:

$$N$$

Drehzahl:

$$n = \frac{N}{t}$$

Zeit für eine Umdrehung:

$$T = \frac{1}{n}$$

Bogenmaß: (Radiant)

$$1 \text{ rad} \hat{=} \frac{360^\circ}{2\pi} \approx 57,3^\circ$$

Winkelgeschwindigkeit: momentane:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$$

mittlere:

$$\bar{\omega} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot n$$

Bahngrößen: zurückgelegte Wegstrecke:

$$s = \varphi \cdot r$$

Tangentialgeschwindigkeit (Bahngeschwindigkeit):

$$v_{\text{tan}} = \frac{2\pi \cdot r}{T} = 2\pi \cdot r \cdot n = \bar{\omega} \cdot r$$

Tangentialbeschleunigung

$$a_{\text{tan}} = \alpha \cdot r$$

Radialbeschleunigung:

$$a_r = \frac{v_{\text{tan}}^2}{r} = \omega^2 \cdot r$$

Bahnbeschleunigung (momentane):

$$a_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot{v}$$

Winkelbeschleunigung (momentane):

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \dot{\omega} = \frac{\dot{v}}{r}$$

gleichförmige Kreisbewegung: ($\omega = \text{konstant}$)

$$\varphi = \varphi_0 + \omega \cdot t$$

gleichmäßig beschleunigte Kreisbewegung:

$$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t \quad \varphi = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2$$

($\alpha = \text{konst.}$), allgemein:

Spezialfall: aus dem Stand ($\omega_0=0, \varphi_0=0$):

$$\alpha = \frac{4 \cdot \pi \cdot N}{t^2}$$

Betrag der Tangentialbeschleunigung:

$$a_t = \frac{v_x}{v} \cdot a_x + \frac{v_y}{v} \cdot a_y + \frac{v_z}{v} \cdot a_z$$

Betrag der Normalbeschleunigung:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2}$$

2.3 Dynamik (Kinetik) der Bewegung:

Erstes Newtonsches Axiom: *ohne äußere Beeinflussung (Kräfte) gilt:*

$$\vec{v} = \text{konst.}$$

Zweites Newtonsches Axiom: (*dynamisches Grundgesetz*)

$$\vec{F} = \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt}$$

hieraus folgt für den Fall konstanter Masse ($m = \text{const.}$):

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Drittes Newtonsches Axiom: (*actio = reactio*)

$$\vec{F}' = -\vec{F}$$

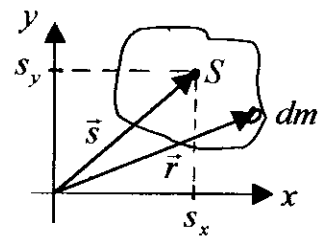
Schwerpunkt

(Massenmittelpunkt):

Der Schwerpunkt eines Systems von Massen ist derjenige Punkt, der sich so bewegt als sei die Gesamtmasse in ihm konzentriert und als griffen äußere Kräfte in ihm an.

Die Koordinate \vec{s} des Schwerpunkts eines Körpers ergibt sich durch Summation über die Massenpunkte bzw. durch Integration über die Massenelemente des Körpers:

$$\vec{s} = \frac{\sum \vec{r}_i m_i}{\sum m_i} = \frac{\int \vec{r} dm}{m}$$



Beispiel: Körper aus Flächenelementen. Ermittlung des Schwerpunktes eines homogenen Körpers durch Summation über seine Flächenelemente nach dem rechts stehenden Schema:

| Massenelement (i) | $s_x(i)$ | $s_y(i)$ | A(i) | $s_x(i) \cdot A(i)$ | $s_y(i) \cdot A(i)$ |
|-------------------|----------|----------|------|---------------------|---------------------|
| Nr. 1 | | | | | |
| Nr. 2 | | | | | |
| Summe | ---- | ---- | ---- | | |

Beispiel: beliebiges Dreieck: *Der Schwerpunkt liegt im Schnittpunkt der Seitenhalbierenden.*

Gewichtskraft:

$$F_G = m \cdot g$$

Lineares Kraftgesetz: $D = \text{Federkonstante}$

$$\vec{F} = -D \cdot \vec{s}$$

Elastizitätsmodul: $F/A = \text{Zug- bzw. Druckspannung}$

$$E = \frac{\Delta F}{A} \cdot \frac{l}{\Delta l}$$

Poissonsche Zahl (Querkontraktion):

$$\mu = - \frac{\Delta d / d}{\Delta l / l}$$

$\mu = 0$: keine Kontraktion
 $\mu \approx 0,3$: typischer Wert
 $\mu = 0,5$: Volumenerhaltung

Reibung:

- Haftreibungskraft:

$$F_R = \mu_H \cdot F_N$$

$\mu_H = \text{Haftreibungszahl}$

- Gleitreibungskraft:

$$F_R = \mu_G \cdot F_N$$

$\mu_G = \text{Gleitreibungszahl}$

- Rollreibungskraft:

$$F_R = \mu_R \cdot F_N$$

$\mu_R = \text{Rollreibungszahl}$

$$F_R = \frac{f}{r} \cdot F_N$$

$f = \text{Rollreibungslänge}$

- Haften auf schiefer Ebene

$$\tan \varphi \leq \mu_H$$

- Gleiten (Rutschen) auf schiefer Ebene

$$a = g \cdot (\sin \varphi - \mu_G \cdot \cos \varphi)$$

- Schraube ist Beispiel für schiefe Ebene

$$\tan \varphi = \frac{s}{\pi \cdot d}$$

($s = \text{Steigung} = \text{Abstand zweier Gänge}$)

($d = \text{Flankendurchmesser}$)

beschleunigende Kraft:

$$\vec{F}_a = m \cdot \vec{a}$$

Trägheitskraft:

$$\vec{F}_{Tr} = -m \cdot \vec{a}$$

D' Alembertsches Prinzip:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i + \vec{F}_{Tr} = 0$$

Impuls eines Körpers mit der Masse m :

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

Impulssatz: In einem abgeschlossenen System (keine Krafteinwirkung von außen), ist der Gesamtimpuls konstant.

$$\vec{p}_{ges} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = const.$$

Raketengleichung: Eine Rakete hat beim Start die Masse m_0 und die Geschwindigkeit v_0 . Während der Beschleunigungsphase wird Masse mit der Relativgeschwindigkeit v_{Tr} zur Rakete herausgeschleudert, so dass die Masse $m(t)$ der Rakete mit der Zeit abnimmt und ihre Geschwindigkeit $v(t)$ zunimmt.

$$\vec{v}(t) = -\vec{v}_{Tr} \cdot \ln \frac{m_0}{m(t)} + \vec{v}_0 + \vec{g} \cdot t$$

Kraftstoß:

(Wirkt eine Kraft eine Zeit auf einen Körper ein, so bewirkt diese eine Impulsänderung des Körpers)

$$\Delta \vec{p} = \int_0^t \vec{F} dt$$

Zweites Newtonsches Axiom verallgemeinert:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Zentraler Stoß zweier Körper: (zweier Körper mit den Massen m_1, m_2)

Der Gesamt-Impuls bleibt beim Stoß immer erhalten.

1. Fall: elastischer Stoß

Hierbei bleibt die kinetische Energie beim Stoß vollständig erhalten

$$\vec{u}_1 = \frac{2 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot \vec{v}_2 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot \vec{v}_1$$

v : Geschwindigkeit vor dem Stoß

u : Geschwindigkeit nach dem Stoß

$$\vec{u}_2 = \frac{2 \cdot m_1}{m_1 + m_2} \cdot \vec{v}_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot \vec{v}_2$$

$$\vec{v}_1 + \vec{u}_1 = \vec{v}_2 + \vec{u}_2$$

2. Fall: völlig inelastischer Stoß

Hierbei haften die Körper nach dem Stoß aneinander, dabei wird kinetische Energie maximal möglich vernichtet

$$\vec{u}_1 = \vec{u}_2 = \frac{m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

2.4 Dynamik der Drehbewegung:

Zentrifugal- und Zentripetalkraft:

$$\vec{F}_f = -\vec{F}_{zp} = -m \cdot \vec{a}_r$$

$$F_{zp} = m \cdot a_r = \frac{m \cdot v^2}{r} = m \cdot \omega^2 \cdot r$$

Steinerscher Satz:

für Massenträgheitsmoment, wenn Drehachse um Strecke s gegen Schwerpunktsachse versetzt ist

$$J_A = J_S + m \cdot s^2$$

berechnet Massenträgheitsmoment J_A bezüglich Drehachse A aus Massenträgheitsmoment J_S bezüglich Schwerpunktsachse S

Drehimpuls

- allgemeiner Körper:

$$\vec{L} = J \vec{\omega}$$

- bei punktförmigem Körper:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Drehimpulssatz:

In einem nicht von außen beeinflussten System bleibt der Drehimpuls erhalten.

Drehmoment

- erzeugt durch äußere Kraft

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_E$$

- erzeugt durch Feder

$$M = D^* \cdot \varphi$$

- erzeugt durch Trägheit

$$\vec{M} = -J \cdot \vec{\alpha} = -\frac{d\vec{L}}{dt}$$

Corioliskraft

$$\vec{F}_c = 2 \cdot m \cdot \vec{v} \times \vec{\omega}$$

Präzessionsbewegung eines mit Drehimpuls L drehenden Körpers, verursacht durch äußeres Drehmoment M

$$\omega_p = \frac{M}{L}$$

$$\vec{M} = \vec{\omega}_p \times \vec{L}$$

2.5 Arbeit, Energie, Leistung:

2.5.1 Arbeit: Arbeit = Kraft x Weg, wobei die Kraft in Wegrichtung zeigt

Einheit: 1J = 1 Nm

$$W = F \cdot s \cdot \cos \varphi$$

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

$$W = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Hubarbeit:

$$W_H = F_G \cdot h = m \cdot g \cdot h$$

Reibungsarbeit:

$$W_R = F_R \cdot s = \mu \cdot F_N \cdot s$$

Beschleunigungsarbeit:

$$W_B = F \cdot s = m \cdot a \cdot s = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Arbeit der Drehbewegung:

$M = \text{konstant}$

$$W = M \cdot \varphi$$

2.5.2 Energie:

potentielle (Lage-)Energie:

$$E_{pot} = F_G \cdot h = m \cdot g \cdot h$$

Spannenergie: (bei Feder)

$$E_S = \frac{1}{2} \cdot D \cdot s^2$$

Bewegungs- oder kinetische Energie:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{p^2}{2 \cdot m}$$

Rotationsenergie: wobei das Massenträgheitsmoment J_A bezüglich diese Achse A zu nehmen ist

$$E_{rot} = \frac{1}{2} \cdot J_A \cdot \omega^2$$

Energiesatz: Im abgeschlossenen System ist die Gesamtenergie konstant.

$$E = E_{pot} + E_S + E_{kin} + E_{rot} = \text{const.}$$

2.5.3 Leistung:

Leistung:

mittlere:

$$\bar{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

momentane:

$$P = \frac{dW}{dt} = \dot{W}$$

bei linearer Bewegung:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

bei Drehbewegung

$$P = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$$

Wirkungsgrad:

$W_N = \text{Nutzarbeit}$

$W_{ges} = \text{insgesamt aufgewandte Arbeit}$

$P_N = \text{Nutzleistung}$

$P_{ges} = \text{insgesamt aufgewandte Leistung}$

$$\eta_w = \frac{W_N}{W_{ges}} = \frac{P_N}{P_{ges}}$$

2.7 Mechanik der Flüssigkeiten und Gase:

2.7.1 Strömung

Volumenstrom: A : durchströmte Fläche

\bar{v} : über Fläche gemittelte Strömungsgeschwindigkeit

$$\frac{dV}{dt} = \frac{A \cdot ds}{dt} = A \cdot \bar{v}$$

Kontinuitätsgleichung: (Erhaltung des Volumens bei inkompressibler Strömung, d.h. $\rho = \text{const}$)

$$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$$

Betriebsdruck:

$$p$$

geodätischer Druck: (Schweredruck)

$$\rho \cdot g \cdot h$$

dynamischer Druck: (Staudruck)

$$\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2$$

Bernoullische Gleichung: resultiert aus Energieerhaltung, gilt also bei reibungsfreier Strömung

$$p + \rho \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 = \text{const.}$$

Torricelli-Ausflusstheorem:

Ausströmungsgeschwindigkeit einer Flüssigkeit mit Dichte ρ aus einer Öffnung

$$v = \sqrt{2gh} \quad \text{bei Flüssigkeitssäule Höhe } h$$

$$v = \sqrt{2 \frac{\Delta p}{\rho}} \quad \text{bei Druckdifferenz } \Delta p$$

Newtonscher Reibungsansatz:

$$F = \eta \cdot A \cdot \frac{dv}{dx}$$

Viskosität (dynamische Zähigkeit):

$$\eta$$

kinematische Viskosität:

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}$$

laminare Umströmung einer Kugel:

- Reibungskraft: Gesetz von Stokes

$$F_R = 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v_\infty$$

Umströmung von Körpern: (turbulent)

- Druckwiderstandskraft

$$F_D = c_D \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \cdot A$$

c_D : Druckwiderstandsbeiwert

- Strömungswiderstandskraft:

$$F_W = c_W \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \cdot A$$

c_W : Strömungswiderstandsbeiwert

Stromlinienkörper: $c_W = 0,06$

Kugel: $c_W = 0,3$

Kreisplatte: $c_W = 1,2$

- dynamische Auftriebskraft:

$$F_A = c_A \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \cdot A_T$$

3. Schwingungen und Wellen:

3.1 Begriffe:

Frequenz: f Einheit: Hz = 1/s

Kreisfrequenz: $\omega = 2 \pi f$ Einheit: 1/s = Hz

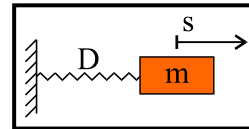
Schwingungsdauer: $T = 1/f$ Einheit: s

3.2 ungedämpfte elastische Sinusschwingungen:

Anmerkung: Der Index 0 gilt bei ungedämpfter Schwingung.

3.2.1 lineare Schwingung:

Federschwingung:



- Kraftgleichung: (Federkonstante $D = F/s$)

$$m \cdot \ddot{s} + D \cdot s = 0$$

- Auslenkung: (Amplitude: \hat{s})

$$s(t) = \hat{s} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)$$

- Geschwindigkeit: Amplitude: $\hat{v} = \hat{s} \cdot \omega_0$

$$v(t) = \hat{v} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$$

- Beschleunigung: Amplitude: $\hat{a} = \hat{v} \cdot \omega_0 = \hat{s} \cdot \omega_0^2$

$$a(t) = -\hat{a} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)$$

- Kreisfrequenz:

$$\omega_0 = \sqrt{D/m}$$

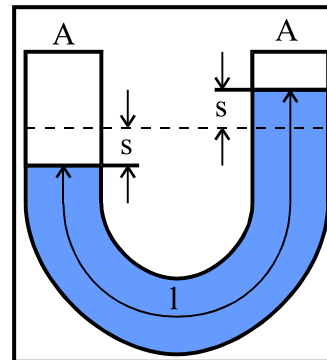
- Schwingungsdauer:

$$T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{m/D}$$

Flüssigkeitsschwingung:

l: Länge der Flüssigkeitsfüllung

s: Auslenkung aus Ruhelage



- Druckdifferenz:

$$p = 2 \cdot s \cdot \rho \cdot g$$

- rücktreibende Kraft:

$$F = p \cdot A = 2 \cdot s \cdot \rho \cdot g \cdot A$$

- effektive Federkonstante:

$$D = 2 \cdot \rho \cdot g \cdot A$$

- träge Masse:

$$m = \rho \cdot l \cdot A$$

- Kreisfrequenz:

$$\omega_0 = \sqrt{D/m} = \sqrt{2g/l}$$

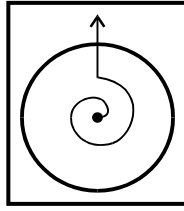
- Schwingungsdauer:

$$T_0 = 2\pi/\omega_0 = \pi \cdot \sqrt{2l/g}$$

3.2.2 Drehschwingung:

Drehschwinger:

z.B. Unruhe einer Uhr,
Pohlsches Rad



- Drehmomentgleichung:

$$J \cdot \ddot{\varphi} + D^* \cdot \varphi = 0 \quad (\text{Winkelrichtgröße } D^* = M/\varphi)$$

- Auslenkung:

$$\varphi(t) = \hat{\varphi} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) \quad (\text{Amplitude } \hat{\varphi})$$

- Kreisfrequenz:

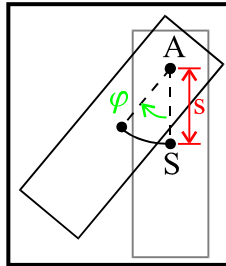
$$\omega_0 = \sqrt{D^*/J}$$

- Schwingungsdauer:

$$T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{J/D^*}$$

Physikalisches Pendel:

(kleine Schwingungsamplitude)



- rückstellendes Drehmoment:
(s = Abstand Achse-Schwerpunkt)

$$M = |\vec{s} \times \vec{F}_g| = s \cdot m \cdot g \cdot \sin \varphi \approx s \cdot m \cdot g \cdot \varphi$$

- Trägheits-Drehmoment:
(J_A = Massenträgheitsmoment
bezüglich einer beliebigen Achse A)

$$M = J_A \cdot \ddot{\varphi}$$

- Kreisfrequenz Schwingung:
(J_S = Massenträgheitsmoment
bezüglich Achse durch Schwerpunkt)

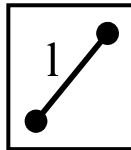
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{s \cdot m \cdot g}{J_A}} = \sqrt{\frac{s \cdot m \cdot g}{J_S + m \cdot s^2}}$$

- Schwingungsdauer:

$$T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J_A}{s \cdot m \cdot g}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J_S + m \cdot s^2}{s \cdot m \cdot g}}$$

Mathematisches Pendel:

(Punktmasse im Abstand l)
(kleine Schwingungsamplitude)
Physikalisches Pendel mit $J_S=0$



- Massenträgheitsmoment:

$$J_A = m \cdot l^2$$

- Kreisfrequenz:

$$\omega_0 = \sqrt{g/l}$$

- Schwingungsdauer:

$$T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{l/g}$$

Pendel: (physikalisch oder mathematisch)

bei größerer Schwingungsamplitude wird die Schwingungszeit länger

Bei Amplitude $\hat{\varphi} = 10^\circ$ wird T um 0,2% größer.

Bei Amplitude $\hat{\varphi} = 20^\circ$ wird T um 0,8% größer.

Zwei gekoppelte mathematische Pendel:

- gleichphasige Schwingung

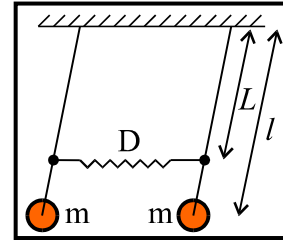
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

- gegenphasige Schwingung:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2 \cdot D}{m} \cdot \left(\frac{L}{l}\right)^2}$$

- Kopplungsgrad:

$$K = \frac{\omega_1^2 - \omega_0^2}{\omega_1^2 + \omega_0^2}$$



Elektrischer Schwingkreis:

- Gleichung:

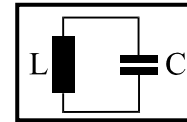
$$\dot{U}_L + \dot{U}_C = L \cdot \ddot{I} + \frac{1}{C} \cdot I = 0$$

- Kreisfrequenz:

$$\omega_0 = \sqrt{1/L \cdot C}$$

- Schwingungsdauer:

$$T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{L \cdot C}$$



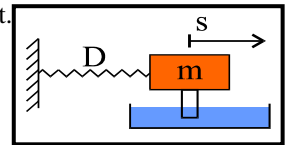
3.3 Viskos gedämpfte Schwingung:

Index d kennzeichnet eine Schwingungsgröße im Fall mit Dämpfung.

Viskose Dämpfung bedeutet, dass die Bremskraft proportional zur Geschwindigkeit ist.

Kraftgleichung: $b =$ Dämpfungskonstante
= *bremsende Reibungskraft / Geschwindigkeit*
[b] = N / (m/s) = kg/s

$$m \cdot \ddot{s} + b \cdot \dot{s} + D \cdot s = 0$$



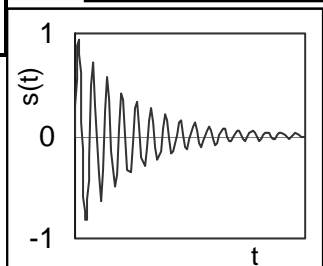
Auslenkung:

$$s(t) = \hat{s} \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_d t)$$

Abklingkonstante = Abklingmaß

[δ] = 1/s

$$\delta = \frac{b}{2m} = \frac{F_R}{2mv}$$



Kreisfrequenz ungedämpft:

$$\omega_0 = \sqrt{D/m}$$

Güte der Schwingung

Anschaulich ist die Güte bei kleiner Dämpfung die Anzahl der Schwingungen, nach denen die Amplitude auf $e^{-\pi} \approx 4,3\%$ abgefallen ist.

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{\Lambda}\right)^2 + \frac{1}{4}}$$

In der Zeichnung ist $Q = 15$ und $\Lambda = 0,21$

Dämpfungsgrad

= Lehrsches Dämpfungsmaß [\mathcal{G}] = 1

$$\mathcal{G} = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{1}{2Q}$$

Kreisfrequenz gedämpft:

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + (\Lambda/2\pi)^2}} = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

Schwingungsdauer:

$$T_d = 2\pi / \omega_d$$

logarithmisches Dekrement:

$$\Lambda = \ln \frac{s(t)}{s(t + T_d)} = \delta \cdot T_d = 2\pi \frac{\delta}{\omega_d} = \frac{\pi}{\sqrt{Q^2 - \frac{1}{4}}}$$

Beispiel Flüssigkeitsschwingung

(siehe oben). Wenn bei kleiner Amplitude der Flüssigkeitsfilm an der Wand haften bleibt, gilt:

$$b = 8\pi \cdot \eta \cdot l \quad \text{und} \quad \delta = 4\pi \cdot \frac{\eta}{\rho \cdot A}$$

Fallunterscheidung nach Größe der Dämpfung:

schwache (unterkritische) Dämpfung: Schwingfall:

$$\delta < \omega_0 \quad \omega_d \approx \omega_0$$

kritische Dämpfung: aperiodischer Fall:

$$\delta = \omega_0 \quad \omega_d = 0 \quad b^2 = 4 \cdot D \cdot m$$

überkritische (sehr starke) Dämpfung: Kriechfall:

$$\delta > \omega_0$$

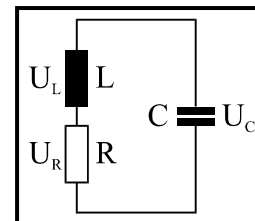
3.3.3 Elektrischer Schwingkreis:

Abklingkonstante:

$$\delta = \frac{R}{2L}$$

Kreisfrequenz:

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$



3.4 Erzwungene Schwingung: (im eingeschwungenen stationären Zustand)

Kreisfrequenz des frei schwingenden ungedämpften Systems: ω_0

Kreisfrequenz der äußeren Anregung: ω

Auslenkung der Masse:

$$s = \hat{s} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

äußere Erregung mittels ausgelenkter Feder:

Federbewegung

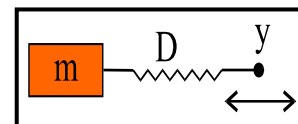
$$y(t) = \hat{y} \cdot \sin \omega \cdot t$$

Differentialgleichung

$$m \cdot \ddot{s} + b \cdot \dot{s} + D \cdot s = D \cdot y$$

Amplitude:

$$\hat{s} = \hat{y} \cdot \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2 \cdot \delta \cdot \omega)^2}}$$



innere Erregung mittels Kraft (z.B. bei Unwucht):

wirkende Kraft

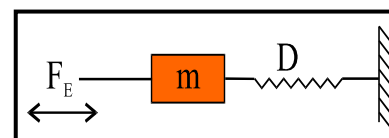
$$F_E(t) = \hat{F}_E \cdot \sin \omega \cdot t$$

Differentialgleichung

$$m \cdot \ddot{s} + b \cdot \dot{s} + D \cdot s = F_E$$

Amplitude:

$$\hat{s} = \frac{\hat{F}_E / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2 \cdot \delta \cdot \omega)^2}}$$



für beide Erregungen gilt:

Phase als Funkt. der Antriebsfrequenz

$$\varphi = \arctan \frac{2 \cdot \delta \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Amplitudenresonanz (maximales \hat{s}) bei

$$\omega = \omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2 \cdot \delta^2}$$

Schwingungsüberhöhung bei

Amplitudenresonanz

$$\frac{\hat{s}_{\max}}{\hat{s}(\omega=0)} = \frac{\omega_0}{2 \cdot \delta} \cdot \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{Q}{\sqrt{1 - 1/4Q^2}}$$

Phasenresonanz ($\varphi = -90^\circ$) bei

$$\omega = \omega_0$$

Schwingungsüberhöhung bei

Phasenresonanz

$$\frac{\hat{s}(\omega = \omega_0)}{\hat{s}(\omega = 0)} = \frac{\omega_0}{2 \cdot \delta} = Q$$

Antriebsleistung =

Reibungsverlustleistung

$$\bar{P} = \overline{F_R \cdot v} = \overline{b \cdot v^2} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \hat{v}^2 = m \cdot \delta \cdot \hat{s}^2 \cdot \omega^2$$

