TECHNISCHE HOCHSCHULE MITTELHESSEN
CAMPUS GIESSEN

MNI
Mathematik, Naturwissenschaften und Informatik

Prof. Dr. Wolfgang Jitschin

formeln-tm3-v15.doc, 21.1.2012

Material zur Vorlesung Mechanik 3: Dynamik

Literaturverzeichnis:

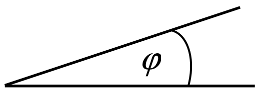
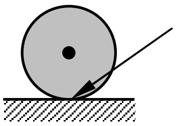
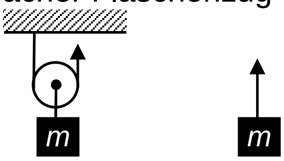
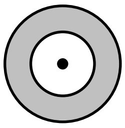
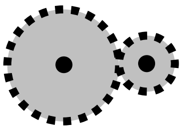
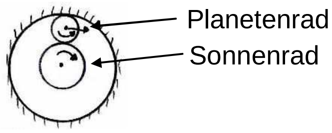
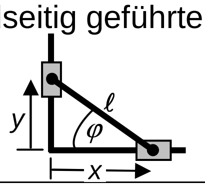
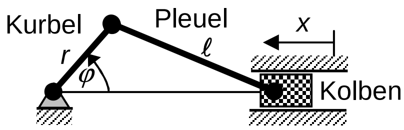
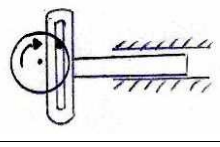
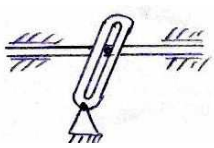
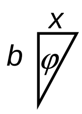
- W. Jitschin: Material zur Vorlesung Technische Mechanik 3: Dynamik
  http://homepages.thm.de/jitschin
- W. Jitschin: Physik für Ingenieure in Formeln und Tabellen
  beim Autor erhältlich
- B. Assmann und P. Selke: Technische Mechanik Band 3: Kinematik und Kinetik
  München: Oldenbourg Verlag, 14. Auflage 2007
- B. Assmann und P. Selke: Aufgaben zur Kinematik und Kinetik
  München: Oldenbourg Verlag, 10. Auflage 2008
- R.C. Hibbeler: Technische Mechanik 3: Dynamik
  München: Pearson Studium, 10. Auflage 2006
- D. Gross, W. Hauger, W. Schnell und J. Schröder: Technische Mechanik, Bd. 3: Kinetik
  Berlin: Springer-Verlag, 2004
- D. Gross, W. Ehlers und P. Wriggers: Formeln und Aufgaben zur Technischen Mechanik 3
  Berlin: Springer-Verlag, 2005

Inhalt der vorliegenden Datei

Viel Nützliches aus der Vorlesung Physik

steht in der separaten Datei: "Formeln-Physik-TM3.doc"

1. Nützliche Maschinen

schiefe Ebene  Steigung = tanφ	Normalkraft $F_N = m\,g \cos\varphi$ Reibungskraft $F_R = \mu\, m\, g \cos\varphi$ Hangabtriebskraft $F_H = m\,g \sin\varphi$ Beschleunigung $a = g\,(\sin\varphi - \mu \cos\varphi)$
Rad oder Walze 	Der Momentanpol des abrollenden Rades ist der Auflagepunkt
einfacher Flaschenzug 	Ist eine Masse an der Rolle befestigt (links), so ist die Seilkraft verglichen zur Kraft, die direkt auf die Masse wirkt (rechts), ½ so groß im Fall einer statischen Kraft und ¼ so groß im Fall einer Trägheitskraft.
Stufenrolle oder abgesetzte Rolle 	Drehmomentverhältnis $\frac{M_1}{M_2} = \frac{r_1}{r_2}$
gekoppelte Rotoren (Getriebe)  $i = \frac{n\_\text{treibendes Rad}}{n\_\text{ getriebenes Rad}}$	$i < 1$: Übersetzung, $i > 1$: Untersetzung Drehzahlverhältnis $n_1/n_2 = 1/i$ Drehmomentverhältnis $M_1/M_2 = i$ Trägheitsmoment J_1 wirkend auf 2: $J_{eff} = J_1 / i^2$
Planetengetriebe 	
beidseitig geführter Stab 	$\tan\varphi = y / x$ $\ell^2 = x^2 + y^2$ $y\, v_y = -\, x\, v_x$
Schubkurbel oder Kurbeltrieb 	wenn Drehung gleichmäßig mit $\varphi = \omega t$ erfolgt und Näherung bis 1. Ordnung in $\lambda = r/\ell$ gemacht wird, dann ist $x = r\,(1 - \cos\varphi + ½\lambda \sin^2\varphi)$ $v_x = r\omega\,(\sin\varphi + ½\lambda \sin 2\varphi)$ $a_x = r\omega^2\,(\cos\varphi + \lambda \cos 2\varphi)$
Kreuzschubgetriebe 	
Kurbelschleife  	$x = b\ \tan\varphi$ wenn die Drehung gleichförmig mit $\varphi = \omega t$ erfolgt, dann gilt $\dot{x} = b\,\omega / \cos^2 \omega t$

2. Eindimensionale Bewegung eines Punktes

2.1 Definitionen

s	Ortskoordinate	$[s]$ = m	s ist der momentane Ort des Punktes, nicht die zurückgelegte Wegstrecke
v	Geschwindigkeit	$[v]$ = m/s	$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \dot{s}$
a	Beschleunigung	$[a]$ = m/s^2	$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dot{v} = \ddot{s}$
r	Ruck	$[r]$ = m/s^3	$r = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \dot{a} = \ddot{v} = \dddot{s}$

Haben s und v gleiches Vorzeichen, dann geht die Bewegung weg vom Ursprung, d.h. der Betrag der Ortskoordinate wird größer.

Haben v und a gleiches Vorzeichen, dann wird die Bewegung schneller, d.h. der Betrag der Geschwindigkeit wird größer.

2.2 Differentieller Zusammenhang

$$v\,\mathrm{d}v = a\,\mathrm{d}s$$

2.3 Integrale Änderungen von Weggrößen — funktionaler Verlauf

Index 1: Anfangspunkt, Index 2: Endpunkt	Index 1: Anfangspunkt, kein Index: Variable
$\Delta s = s_2 - s_1 = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,\mathrm{d}t$	$s(t) = s_1 + \int_{t_1}^{t} v(t)\,\mathrm{d}t$
$\Delta v = v_2 - v_1 = \int_{t_1}^{t_2} a(t)\,\mathrm{d}t$	$v(t) = v_1 + \int_{t_1}^{t} a(t)\,\mathrm{d}t$
$\Delta(v^2) = v_2^2 - v_1^2 = 2\int_{s_1}^{s_2} a(s)\,\mathrm{d}s$	$v^2(s) = v_1^2 + 2\int_{s_1}^{s} a(s)\,\mathrm{d}s$
$\Delta t = t_2 - t_1 = 2\int_{v_1}^{v_2} \frac{\mathrm{d}v}{a(v)}$	$t(v) = t_1 + 2\int_{v_1}^{v} \frac{\mathrm{d}v}{a(v)}$

2.4 Spezielle Bewegungen

2.4.1 **gleichförmige** Bewegung: (v = konstant)

s: Ort zum Zeitpunkt t

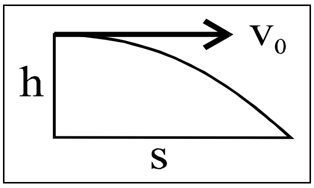
$$\boxed{s(t) = s_0 + v_0 t}$$
$$\boxed{v(t) = v_0}$$
$$\boxed{a(t) = 0}$$

2.4.2 **gleichmäßig beschleunigte** Bewegung: (a = konstant)

allgemeiner Fall $v_0 \neq 0$, $s_0 \neq 0$: s_0: Ort s zum Zeitpunkt t=0 v_0: Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t=0 s: Ort zum Zeitpunkt t v: Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t	$\boxed{s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = s_0 + \frac{v^2 - v_0^2}{2a}}$ $\boxed{v = v_0 + at}$ $\boxed{a = \frac{1}{2} \frac{v^2 - v_0^2}{s - s_0}}$
Spezialfall: Ort und Geschwindigkeit zu Beginn sind Null (s_0 = 0, v_0=0) $\bar{v}$: mittlere Geschwindigkeit	$\boxed{s = \frac{1}{2} a t^2}$ $\boxed{v = \sqrt{2sa} = \frac{2s}{t} = 2\,\bar{v}}$ $\boxed{a = \frac{v^2}{2s} = \frac{2s}{t^2}}$
Spezialfall: Bremsvorgang aus Anfangsgeschwindigkeit v_0 bei s_0=0 mit gleichmäßiger Verzögerung s_B: Bremsweg	$\boxed{s_B = \frac{1}{2} v_0 t_B = -\frac{1}{2} \frac{v_0^2}{a}}$
Spezialfall: Freier Fall mit Anfangsgeschwindigkeit Null h: Fallstrecke t: Fallzeit v: Fallgeschwindigkeit	$\boxed{h = \frac{1}{2} g\, t^2}$ $\boxed{t = \sqrt{2h/g}}$ $\boxed{v = \sqrt{2gh}}$
Spezialfall: senkrechter Wurf: (-) nach oben; (+) nach unten v:: Geschwindigkeit v h: Höhe als Funktion der Zeit h_{max}: maximale Wurfhöhe (bei Wurf nach oben)	$\boxed{v = v_0 \pm gt = \sqrt{v_0^2 \pm 2gh}}$ $\boxed{h = v_0 t \pm \frac{1}{2} g t^2}$ $\boxed{h_{max} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g}}$

2.4.3 Überlagerung von gleichförmiger und gleichmäßig beschleunigter Bewegung

Spezialfall: waagerechter Wurf:
horizontal x: gleichförmige Bewegung
vertikal y: gleichm. beschl. Bewegung
Wurfweite: s



$$x(t) = v_0\ t$$

$$y(t) = \tfrac{1}{2}\, g \cdot t^2$$

$$s = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Spezialfall: schräger/schiefer Wurf
horizontal x: gleichförmige Bewegung
vertikal y: gleichm. beschl. Bewegung
Bahnkurve: Wurfparabel $y(x)$

$$x(t) = v_0 t \cos\varphi$$

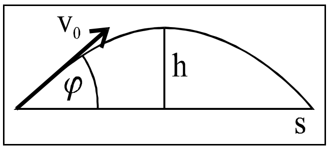
$$v_x(t) = v_0 \cos\varphi$$

$$y(t) = v_0 t \cdot \sin\phi - \tfrac{1}{2} g t^2$$

$$v_y(t) = v_0 \sin\varphi - gt$$

$$y(x) = x \tan\varphi - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\varphi}$$

mit Abwurf- und Auftreffpunkt auf gleicher Höhe:



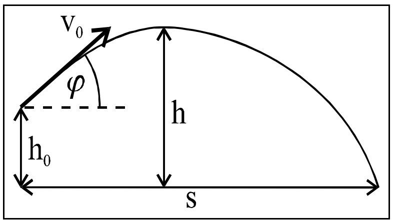
maximale Wurfhöhe h
Wurfdauer t
horizontale Wurfweite s

$$h = \frac{v_0^2}{2 \cdot g} \cdot \sin^2\varphi$$

$$t = \frac{2 \cdot v_0 \cdot \sin\varphi}{g}$$

$$s = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin(2 \cdot \varphi)$$

Spezialfall: schräger / schiefer Wurf,
Abwurfpunkt um h_0 höher als Auftreffpunkt



maximale Steighöhe h
Wurfdauer t□
horizontale Wurfweite s

$$h = h_0 + \frac{v_0^2 \sin^2\varphi}{2g}$$

$$t = \textit{Steigzeit} + \textit{Fallzeit} = \frac{v_0 \sin\varphi}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_0 \sin\varphi}{g}\right)^2 + \frac{2h_0}{g}}$$

$$s = t v_0 \cos\varphi$$

2.5 Herleitung der Bewegungsgleichungen

Aufgabe ist das Berechnen der Zeitabhängigkeit von Ort $s(t)$, Geschwindigkeit $v(t)$ und Beschleunigung $a(t)$ einer beliebigen Bewegung, wenn bestimmte Beziehungen (im Folgenden als einzelne Fälle behandelt) gegeben sind.

Lösungskonzept für den Fall der eindimensionalen Bewegung

1. Schritt: Verstehen des Problems, Zeichnen einer Skizze kann hilfreich sein
2. Schritt: Ansatz für funktionalen Zusammenhang erkennen, z.B. $a(s)$
3. Schritt: Berechnen der analytischen zeitabhängigen Funktionen von Ort $s(t)$, Geschwindigkeit $v(t)$ und Beschleunigung $a(t)$ der Bewegung, die Vorgehensweise ist fallspezifisch wie in der folgenden Tabelle gegeben

Fall	gegeben	Lösungsgang (der Index 1 kennzeichnet den Anfangszustand)		
		1. Teilschritt	2. Teilschritt	3. Teilschritt
1	$a(t)$	$v(t) = v_1 + \int_{t_1}^{t} a(t)\,\mathrm{d}t$	$s(t) = s_1 + \int_{t_1}^{t} v(t)\,\mathrm{d}t$	
2	$v(t)$	$s(t) = s_1 + \int_{t_1}^{t} v(t)\,\mathrm{d}t$	$a(t) = \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}$	
3	$s(t)$	$v(t) = \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}$	$a(t) = \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}$	
4	$v(s)$	$t(s) = t_1 + \int_{s_1}^{s} \frac{\mathrm{d}s}{v(s)}$	umstellen nach $s(t)$	weiter bei Fall 3
5	$a(s)$	$v(s) = \sqrt{v_1^2 + 2\int_{s_1}^{s} \mathrm{d}s\, a(s)}$	weiter bei Fall 4	
6	$a(v)$	$t(v) = t_1 + \int_{v_1}^{v} \frac{\mathrm{d}v}{a(v)}$	umstellen nach $v(t)$	weiter bei Fall 2

4. Schritt: Bestimmung der Konstanten aus den Randbedingungen
5. Schritt: Angabe der gesuchten numerischen Funktionen
6. Schritt: graphische Darstellung des Bewegungsablaufs
7. Schritt: Angabe sonstiger gesuchter Größen

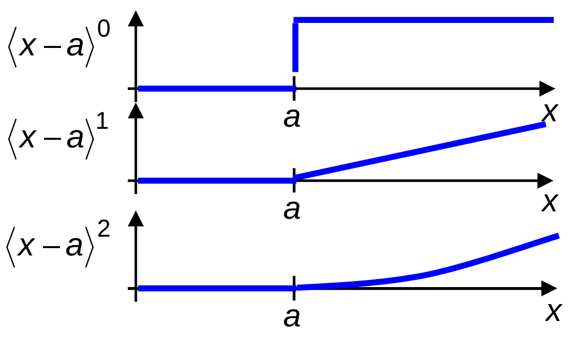
2.6 Föppl-Klammer

Definition: $\langle x-a\rangle^n = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a \\ (x-a)^n & \text{für } x > a \end{cases}$

Ableitung: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\langle x-a\rangle^n = n\,\langle x-a\rangle^{n-1}$

Integral: $\int \mathrm{d}x\,\langle x-a\rangle^n = \frac{1}{n+1}\langle x-a\rangle^{n+1} + C$

Beispiele zu Föppl:



3. Beliebige Bewegung eines Punktes in der Ebene

Kartesische Koordinaten

x-Geschwindigkeit	$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x}$
y-Geschwindigkeit	$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dot{y}$
x-Beschleunigung	$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \dot{v}_x = \ddot{x}$
y-Beschleunigung	$a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \dot{v}_y = \ddot{y}$

Polarkoordinaten

Begriff „radial“:	Bewegung weg vom Ursprung
Begriffe „zirkular“ oder „Bahn“	Bewegung entlang des Kreises mit Radius r um Ursprung
radiale Geschwindigkeit	$v_r = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \dot{r}$
Bahn-Geschwindigkeit	$v_\varphi = r \cdot \dot{\varphi} = r \cdot \omega$
radiale Beschleunigung	$a_r = \underbrace{\ddot{r}}_{\text{rein radial}} - \underbrace{r \cdot \dot{\varphi}^2}_{\text{zentripetal}} = \underbrace{\ddot{r}}_{\text{rein radial}} - \underbrace{r \cdot \omega^2}_{\text{zentripetal}}$
Bahn-Beschleunigung	$a_\varphi = \underbrace{2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\varphi}}_{\text{Coriolis}} + \underbrace{r \cdot \ddot{\varphi}}_{\text{rein Umfang}} = \underbrace{2\, \omega \cdot v_r}_{\text{Coriolis}} + \underbrace{r \cdot \alpha}_{\text{rein Umfang}}$

Natürliche Koordinaten

Begriff „tangential“	in Bewegungsrichtung (Bahnrichtung)
Begriff „normal“	senkrecht zur Bewegungsrichtung
Bahn-Geschwindigkeit	$v_\varphi = r \cdot \dot{\varphi} = r \cdot \omega$
normale Beschleunigung	$a_n = r \cdot \omega^2 = \frac{v^2}{r}$
tangentiale Beschleunigung	$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dot{v}$

Kreisbahn

$r = konst$

$\dot{r} = 0$

$\ddot{r} = 0$

4. Bewegung des starren Körpers in der Ebene

allgemeine Rotation

Winkel	φ
Anzahl der Umdrehungen	$z = \dfrac{\varphi}{2\pi}$
Winkelgeschwindigkeit	$\omega = \dot{\varphi} = 2\pi n$
Drehzahl	$n = \dot{z} = \dfrac{\omega}{2\pi}$
Winkelbeschleunigung	$\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$
Weg	$s = r\ \varphi$
Geschwindigkeit	$v = r\ \omega$
tangentiale Beschleunigung	$a_t = r\ \alpha$
normale Beschleunigung	$a_n = r\ \omega^2$
bei allgemeiner Drehbewegung gilt:	$\alpha\ d\varphi = \omega\ d\omega$

Spezialfall: gleichförmige Drehbewegung

$$\alpha = 0$$

$$\omega = \text{konst.}$$

$$\varphi = \int \omega\ dt = \omega t + \varphi_0$$

Spezialfall: gleichmäßig beschleunigte Drehbewegung

$$\alpha = \text{konst.}$$

$$\omega = \int \alpha\ dt = \alpha t + \omega_0$$

$$\varphi = \int \omega\ dt = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \varphi_0$$

ferner gilt: $\alpha \int d\varphi = \int d\omega\ \omega$

und $\alpha\left(\varphi_2 - \varphi_1\right) = \frac{1}{2}\left(\omega_2^2 - \omega_1^2\right)$

Korrespondenz von Größen bei linearer und Dreh-Bewegung

lineare Bewegung	lineare Größen bei Drehbewegung	Drehbewegung
s Ort	$s = r\ \varphi$	φ Winkel
v Geschwindigkeit	$v = r\ \omega$	ω Winkelgeschwindigkeit
a Beschleunigung	$a_t = r\ \alpha$ (tangential) $a_n = r\ \omega^2$ (normal)	α Winkelbeschleunigung

Herleitung der Bewegungsgleichungen

Berechnen der Zeitabhängigkeit von Winkel $\varphi(t)$, Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$ und Winkelbeschleunigung $\alpha(t)$ einer beliebigen Bewegung, wenn bestimmte Beziehungen (im Folgenden als einzelne Fälle behandelt) gegeben sind.

Lösungskonzept für den Fall der eindimensionalen Bewegung

1. Schritt: Verstehen des Problems, Zeichnen einer Skizze kann hilfreich sein
2. Schritt: Ansatz für funktionalen Zusammenhang erkennen, z.B. $\alpha(\omega)$
3. Schritt: Berechnen der analytischen zeitabhängigen Funktionen von Winkel $\varphi(t)$, Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$ und Winkelbeschleunigung $\alpha(t)$.
   Die Vorgehensweise ist fallspezifisch wie in der folgenden Tabelle gegeben

Fall	gegeben	Lösungsgang (der Index 1 kennzeichnet den Anfangszustand)		
		1. Teilschritt	2. Teilschritt	3. Teilschritt
1	$\alpha(t)$	$\omega(t)=\omega_1+\int_{t_1}^{t}\alpha(t)\,\mathrm{d}t$	$\varphi(t)=\varphi_1+\int_{t_1}^{t}\omega(t)\,\mathrm{d}t$	
2	$\omega(t)$	$\varphi(t)=\varphi_1+\int_{t_1}^{t}\omega(t)\,\mathrm{d}t$	$\alpha(t)=\frac{\mathrm{d}\,\omega(t)}{\mathrm{d}t}$	
3	$\varphi(t)$	$\omega(t)=\frac{\mathrm{d}\,\varphi(t)}{\mathrm{d}t}$	$\alpha(t)=\frac{\mathrm{d}\,\omega(t)}{\mathrm{d}t}$	
4	$\omega(\varphi)$	$t(\varphi)=t_1+\int_{\varphi_1}^{\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\omega(\varphi)}$	umstellen nach $\varphi(t)$	weiter bei Fall 3
5	$\alpha(\varphi)$	$\omega(\varphi)=\sqrt{\omega_1^2+2\int_{\varphi_1}^{\varphi}\mathrm{d}\varphi\,\alpha(\varphi)}$	weiter bei Fall 4	
6	$\alpha(\omega)$	$t(\omega)=t_1+\int_{\omega_1}^{\omega}\frac{\mathrm{d}\omega}{\alpha(\omega)}$	umstellen nach $\omega(t)$	weiter bei Fall 2

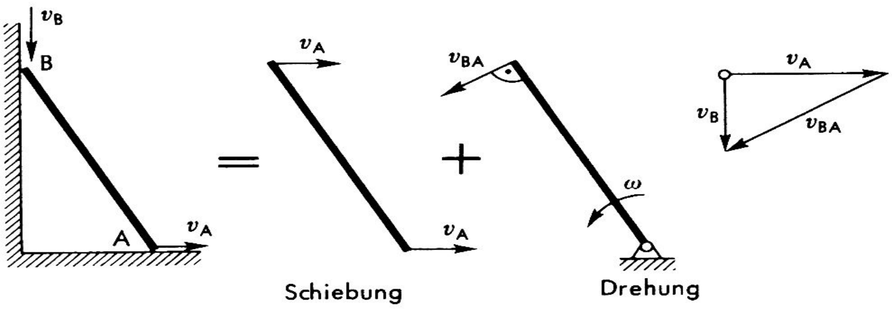
4. Schritt: Bestimmung der Konstanten aus den Randbedingungen
5. Schritt: Angabe der gesuchten numerischen Funktionen
6. Schritt: graphische Darstellung des Bewegungsablaufs
7. Schritt: Angabe sonstiger gesuchter Größen

Zerlegung der Bewegung eines Körpers in Translation und Rotation

Die allgemeine Bewegung eines Körpers von einer Anfangsposition 1 in eine Endposition 2 lässt sich zerlegen in zwei Schritte, nämlich dem ersten Schritt einer Translation (Schiebung) und dem zweiten Schritt einer Drehung:

$$\boxed{\text{Bewegung} = \text{Translation (Schiebung)} + \text{Rotation}}$$

Beispiel: geführter Stab:



Eindeutig ist der Winkel der Rotation. Dagegen ist der Drehpunkt A frei wählbar, seine Wahl bestimmt die Translation. Somit gibt es beliebig viele Möglichkeiten der Zerlegung.

Addition der Geschwindigkeiten bei Zerlegung der Bewegung

Geschwindigkeiten zweier Punkte A und B eines starren Körper:

$$\underbrace{\vec{v}_B}_{\substack{\text{Translation}\\ \text{von Punkt B}}} = \underbrace{\vec{v}_A}_{\substack{\text{Translation}\\ \text{von Punkt A}}} + \underbrace{\vec{v}_{BA}}_{\substack{\text{Drehung von}\\ \text{Punkt B um Punkt (Pol) A}}}$$

Durch zeitliche Ableitung folgt für die Beschleunigungen:

$$\underbrace{\vec{a}_B}_{\substack{\text{Translation}\\ \text{von Punkt B}}} = \underbrace{\vec{a}_A}_{\substack{\text{Translation}\\ \text{von Punkt A}}} + \underbrace{\vec{a}_{BA}}_{\substack{\text{Drehung von}\\ \text{Punkt B um Punkt (Pol) A}}}$$

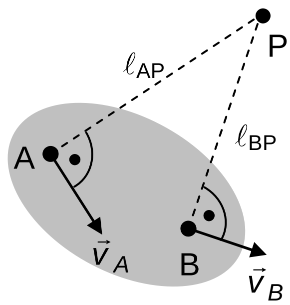
Die Beschleunigung $\vec{a}_{BA}$ hat zwei Komponenten:

tangential $a_t = \ell\,\alpha$

normal $a_n = \ell\,\omega^2$

Drehpol (Momentanpol)

Die allgemeine Bewegung eines Körpers kann als reine Drehung ohne Translation dargestellt werden, wenn die Drehung um den Drehpol erfolgt. Der Drehpol kann während der Bewegung seinen Ort ändern. Der momentane Drehpol eines Körpers mit den Punkten A und B ergibt sich als Schnittpunkt der Senkrechten auf den Geschwindigkeitsvektoren v_A und v_B in den Punkten A und B.



Winkelgeschwindigkeit der Körperdrehung und die Geschwindigkeiten der Punkte A und B sind verknüpft:

$$\boxed{\omega_{\text{Körper}} = \frac{v_A}{\ell_{AP}} = \frac{v_B}{\ell_{BP}}}$$

Beispiel: Beim abrollenden Rad ist der Auflagepunkt der momentane Drehpol.

Rotierendes Führungssystem (Index f):

Beschleunigung des Führungssystems : $\vec{a}_f = \underbrace{\vec{a}_{ft}}_{\substack{\text{tangential}\\ r\,\alpha}} + \underbrace{\vec{a}_{fn}}_{\substack{\text{normal}\\ r\,\omega^2}}$

Beschleunigung des Körpers: $\vec{a} = \vec{a}_f + \vec{a}_{rel} + \underbrace{\vec{a}_{Coriolis}}_{2\,\vec{\omega}\times\vec{v}_{rel}}$

5. Dynamisches Grundgesetz

Nach Newton (1642-1727)

Definition 1

Menge der Materie = Masse = Dichte x Volumen $m = \rho \cdot V$

Definition 2

Bewegungsgröße = Impuls = Masse x Geschwindigkeit $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$

Definition 3

Masse besitzt Widerstandsvermögen gegen Änderung ihrer Bewegung (Trägheit)

Definition 4

Auf einen Körper einwirkende Kraft ist das Bestreben, seine Bewegung zu ändern.

Axiom 1

Jeder Körper verharrt in seinem Zustand der gleichförmigen, geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, diesen Zustand zu ändern.

$$\vec{F} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v} = \text{const}$$

Axiom 2

Die Änderung der Bewegungsgröße eines Körpers ist der Einwirkung einer Kraft proportional. Die Änderung erfolgt in der Richtung der einwirkenden Kraft.

$$\Delta \vec{p} \propto \vec{F}$$

Axiom 3

Die Wirkung ist stets der Gegenwirkung gleich, oder die Wirkung zweier Körper aufeinander ist stets gleich und von entgegen gesetzter Richtung.

$$\vec{F}' = -\vec{F}$$

Dynamisches Grundgesetz

Die zeitliche Änderung der translatorischen Bewegungsgröße $m \cdot \vec{v}$ ist gleich der einwirkenden Kraft, die diese Änderung verursacht.

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m \cdot \vec{v}\right) = \underbrace{m \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}}_{\text{bei starrem Körper}} + \underbrace{\vec{v} \cdot \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}}_{\text{bei kontinuierlichem Strom}}$$

Analog gilt bei der Drehbewegung, dass die zeitliche Änderung des Dralls gleich dem einwirkenden Drehmoment ist, das diese Änderung verursacht.

Mit der Tangentialgeschwindigkeit v_φ ergibt sich:

$$M = F \cdot r = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m \cdot v_\varphi\right) \cdot r = \underbrace{m \cdot r \cdot \frac{\mathrm{d}v_\varphi}{\mathrm{d}t}}_{\text{bei starrem Körper}} + \underbrace{v_\varphi \cdot r \cdot \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}}_{\text{bei kontinuierlichem Strom}}$$

In vektorieller Form geschrieben:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r} \times m \cdot \vec{v}\right) = \underbrace{\vec{r} \times m \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}}_{\text{bei starrem Körper}} + \underbrace{\vec{r} \times \vec{v} \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}}_{\text{bei kontinuierlichem Strom}}$$

Korrespondenz von Größen

lineare Bewegung (Schiebung)	drehende Bewegung (Rotation)
F Kraft	M (Dreh-) Moment
m Masse	J Massenträgheitsmoment
a Beschleunigung	α Winkelbeschleunigung

d'Alembertsches Prinzip (ausführlicher behandelt Kapitel 7)
Dieses lautet in einer für die Vorlesung Dynamik vereinfachten Version:
Durch Einführung von Trägheitskräften können dynamische Probleme auf statische zurückgeführt werden.

$$\Sigma \vec{F} - m \cdot \vec{a} = 0 \qquad \Sigma \vec{M} - J \cdot \vec{\alpha} = 0$$

Energiesatz
Die zur Geschwindigkeitsänderung einer Masse aufgewendete bzw. gewonnene Arbeit verändert die Energie einer Masse. Mit Index 1 für den Anfangszustand und Index 2 für den Endzustand ergibt sich:

$$\int_1^2 \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = m \int_1^2 \vec{a} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = m \int_1^2 \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{v} = \tfrac{1}{2} m \left(v_2^2 - v_1^2 \right)$$

6. Impuls und Drall

6.1 Translation

Dynamisches Grundgesetz $\vec{F} = \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}) = m \cdot \vec{a} + \dot{m} \cdot \vec{v}$

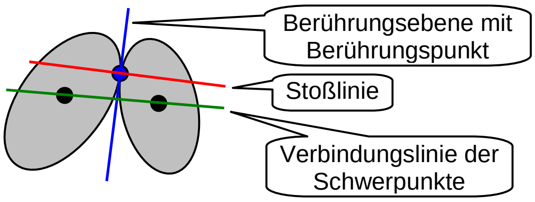
Kraftstoß $\int \vec{F}\, dt$

Impulssatz $\int \vec{F}\, dt = m \cdot \Delta\vec{v}$ oder $m \cdot v_2 = m \cdot v_1 + \int_1^2 \vec{F}\, dt$

Index 1 kennzeichnet den Anfangszustand, Index 2 den Endzustand.
Ein Impuls (Kraftstoß) bewirkt eine Änderung der Bewegungsgröße (des Impulses).

Impulserhaltungssatz $\underbrace{\left(\sum m_i v_i\right)_2}_{\text{Endzustand}} = \underbrace{\left(\sum m_i v_i\right)_1}_{\text{Ausgangszustand}}$

Stoß zweier Körper



- Beim Stoß berühren sich die Körper (zu Beginn des Stoßes) im so genannten **Berührungspunkt**.
- Die **Berührungsebene** ist die Tangentialfläche an die Körperoberflächen im Berührungspunkt.
- Die **Stoßlinie** ist die Wirkungslinie der beim Stoß auftretenden Kräfte.
  Sie steht senkrecht zur Berührungsebene.
- Ein Stoß ist **zentrisch**, wenn
  a) der Berührungspunkt auf der Verbindungslinie der beiden Schwerpunkte liegt und
  b) die Berührungsebene senkrecht zur Verbindungslinie ist.
  Beim zentrischen Stoß liegen die auftretenden Kräfte auf der Verbindungslinie der Schwerpunkte.
- Ein Stoß ist **gerade**, wenn die Geschwindigkeitsvektoren der Schwerpunkte in der Stoßlinie (Gerade durch Schwerpunkte und Berührungspunkt) liegen.

Stoßmittelpunkt
Stoßmittelpunkt ist der Punkt, auf dem beim Stoß keine Kraft übertragen wird.
Er ist der momentane Drehpol.

Impuls-Erhaltungs-Satz: (beim linearen Stoß)

Bewegungsgröße (Impuls) nachher	=	Bewegungsgröße (Impuls) vorher	+	Wirkung des Kraftstoßes
$m \cdot \vec{v}_2$		$m \cdot \vec{v}_1$		$\int_1^2 \vec{F}\, dt$

Während des linearen Stoßes ändert sich die Bewegungsgröße

bei Annäherung Deformation (Verformung): Kompressionsperiode $\int \vec{F}\, dt$

bei Entfernung Restitution (Rückbildung): Dekompressionsperiode: $\int \vec{K}\, dt$

linearer Stoß zweier Körper A und B

Index A: Körper A, Index B: Körper B

Index 1: vorher, Index 2: nachher

Geschwindigkeit des Schwerpunktes: $$v_{SP} = \frac{m_A \cdot v_{A1} + m_B \cdot v_{B1}}{m_A + m_B} = \frac{m_A \cdot v_{A2} + m_B \cdot v_{B2}}{m_A + m_B}$$

<u>Stoßzahl</u> k ist Maß für Elastizität, Definition: $$k = \frac{\int K\,dt}{\int F\,dt}$$

$k = 1$	(voll)elastisch
$0<k<1$	teilelastisch
$k = 0$	plastisch

Es gilt: $$k = \underbrace{\frac{v_{B2} - v_{A2}}{v_{A1} - v_{B1}}}_{\text{beide Körper}} = \underbrace{\frac{v_{SP} - v_{A2}}{v_{A1} - v_{SP}}}_{\text{nur Körper A}} = \underbrace{\frac{v_{B2} - v_{SP}}{v_{SP} - v_{B1}}}_{\text{nur Körper B}}$$

Geschwindigkeiten nach dem linearen Stoß zweier Körper A und B mit den Anfangsgeschwindigkeiten v_{A1} und v_{B1}:

$$v_{A2} = \frac{(m_A / m_B - k)\, v_{A1} \;+\; (1+k)\, v_{B1}}{m_A / m_B \;+ 1}$$

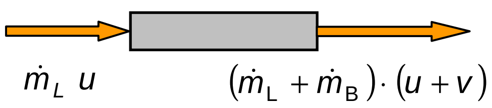
$$v_{B2} = \frac{(1+k)\, v_{A1} \;+\; (m_B / m_A - k)\, v_{B1}}{m_B / m_A \;+ 1}$$

<u>Drehstoß</u>

Beim elastischen und teilelastischen Drehstoß gelten die obigen Formeln für den linearen Stoß, wenn in den Formeln die Geschwindigkeiten v durch die Winkelgeschwindigkeiten ω ersetzt werden.

<u>Vorschubkraft bei einem Strahltriebwerk</u>

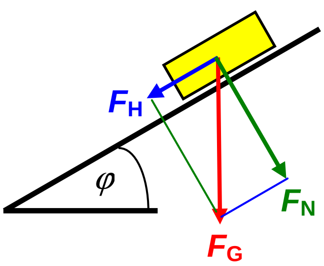
Geschwindigkeit des Flugzeuges: u
Ausströmgeschw. relativ zum Flugzeug: v
Index L: Luft
Index B: Benzin



Vorschubkraft (kurz: Schub): $F = (\dot{m}_L + \dot{m}_B)\cdot(u+v) - \dot{m}_L \cdot u$

<u>Schiefe Ebene</u>

Gewichtskraft: $F_G = m\,g$
Hangabtriebskraft: $F_H = m\,g \sin\varphi$
Normalkraft: $F_N = m\,g \cos\varphi$
Reibungskraft: $F_R = \mu\, F_N$



6.1 Rotation

Massenträgheitsmoment eines starren Körpers, der sich um eine Achse dreht:

$J = \int r^2 \,\mathrm{d}m$ wobei r der Abstand des Massenelements dm von der Achse ist

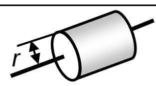
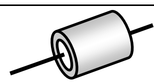
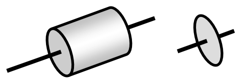
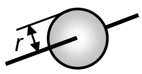
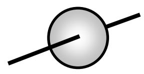
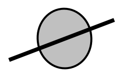
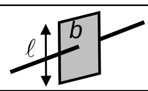
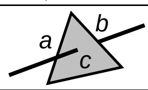
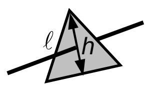
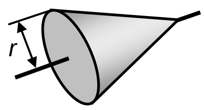
Berechnung den Massenträgheitsmoments über die Fläche des Körpers:

das Massenelement lässt sich aus dem Flächenelement berechnen:

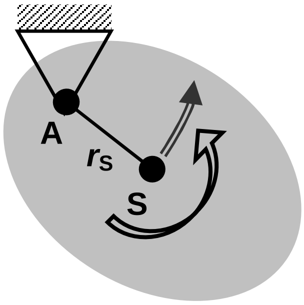
$$\mathrm{d}m = \underbrace{\rho}_{\text{Dichte}} \cdot \underbrace{s}_{\text{Dicke}} \cdot \mathrm{d}A$$

Massenträgheitsmomente einiger einfacher Körper

In allen Fällen ist angenommen, dass die Drehachse durch den Schwerpunkt des Körpers geht (gekennzeichnet durch den Index S).

- allgemeine Definition des Massenträgheitsmoments:	$\boxed{J = \sum_{i=1}^{N} r_i^2\, m_i = \int r^2 \mathrm{d}m}$	
- Hohlzylinder, dünnwandig (Rohr):	$\boxed{J_S = m\, r^2}$	
- Hohlzylinder, dickwandig (Stab): $m = \pi\, (r_a^2 - r_i^2)\, h\, \rho$	$\boxed{J_S = \frac{1}{2}\, m\, (r_a^2 + r_i^2)}$	
- Vollzylinder, Scheibe: $m = \pi\, r^2\, h\, \rho$	$\boxed{J_S = \frac{1}{2}\, m\, r^2}$	
- Vollkugel: $m = {}^4/_3\, \pi\, r^3\, \rho$	$\boxed{J_S = \frac{2}{5}\, m\, r^2}$	
- Hohlkugel, dünnwandig: $m = 4\pi\, r^2\, s$ (Wanddicke s)	$\boxed{J_S = \frac{2}{3}\, m\, r^2}$	
- Scheibe (Drehachse liegt in der Scheibe) $m = \pi\, r^2 s\, \rho$ (Dicke s)	$\boxed{J_S = \frac{1}{4}\, m\, r^2}$	
- Stab: dünn: Länge ℓ, Breite $b = 0$ dicker: Länge ℓ, Breite b > 0	$\boxed{J_S = \frac{1}{12}\, m\, \left(\ell^2 + b^2\right)}$	
- Dreieck mit Seiten a,b,c: (Drehachse senkrecht zur Fläche)	$\boxed{J_S = \frac{1}{36}\, m\, (a^2 + b^2 + c^2)}$	
- gleichseitiges Dreieck Seitenlänge ℓ, Höhe h, (Drehachse senkrecht zur Fläche)	$\boxed{J_S = \frac{1}{12}\, m\, \ell^2 = \frac{1}{9}\, m\, h^2}$	
- Vollkegel (senkr. Kreiskegel): Bodenradius r, Höhe h (Drehachse = Symmetrieachse) $m = {}^{\pi}/_3\, r^2\, h\, \rho$	$\boxed{J_S = \frac{3}{10}\, m\, r^2}$	

Steinerscher Satz dient zur Berechnung des Massenträgheitsmoments J_A eines Körpers der Masse m bezüglich einer Achse A , wenn das Massenträgheitsmoment J_S bezüglich der dazu parallelen Schwerpunktachse im Abstand r_S bekannt ist:



$$J_A = J_S + r_S^2 \cdot m$$

$$J_{xy} = J_{xy} + x_S \cdot y_S \cdot m$$

Das bedeutet, dass die Drehung des Körpers um die Achse A gleichwertig ist zur einer gleichzeitigen Drehung des Körpers um seinen Schwerpunkt und eine Drehung des Schwerpunktes um die Achse.

Trägheitsradius $\qquad i = \sqrt{\dfrac{J}{m}}$

reduzierte Masse (Achsabstand r) $\qquad m_{red} = \dfrac{J}{r^2}$

Massenträgheitsmomente eines starren Körpers bezüglich eines xyz-Koordinatensystems

bezüglich der x-, y- und z-Achse

Drehung um x-Achse: $J_x = \int \left(y^2 + z^2\right) \mathrm{d}m$

Drehung um x-Achse: $J_y = \int \left(x^2 + z^2\right) \mathrm{d}m$

Drehung um x-Achse: $J_z = \int \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}m$

Zentrifugal- bzw. Deviationsmomente

$J_{xy} = \int xy \, \mathrm{d}m$

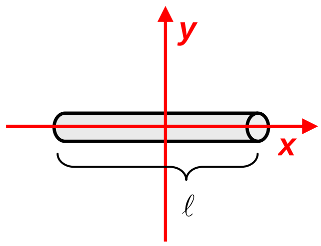
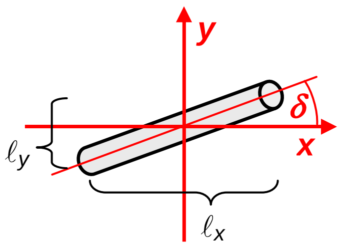
$J_{yz} = \int yz \, \mathrm{d}m$

$J_{xz} = \int xz \, \mathrm{d}m$

Beispiel für die verschiedenen Massenträgheitsmomente eines Körpers

dünner Stab der Länge ℓ liegt in der x-y-Ebene

die z-Koordinate des Körpers ist immer gleich 0

		
Drehung um x-Achse	$J_x = 0$ weil $y = 0$	$J_x = \frac{1}{12} m \, \ell_y^2 = \frac{1}{12} m \, \ell^2 \sin^2 \delta$
Drehung um y-Achse	$J_y = \frac{1}{12} m \, \ell^2$	$J_y = \frac{1}{12} m \, \ell_x^2 = \frac{1}{12} m \, \ell^2 \cos^2 \delta$
Deviationsmoment	$J_{xy} = 0$ weil $y = 0$ Wenn $J_{xy} = 0$, dann liegt die Symmetrieachse des Körpers auf einer Achse des Koordinatensystems	$J_{xy} = \int xy \, \mathrm{d}m = \int x \; x \tan\delta \, \mathrm{d}m = \tan\delta \int x^2 \mathrm{d}m = \tan\delta \, J_y$

Hauptachsen
Ein starrer Körper hat drei zueinander senkrecht stehende Hauptachsen,
deren Schnittpunkt im Schwerpunkt liegt.
Für eine Hauptachse wird das Trägheitsmoment maximal, für eine andere minimal.

Bei einem flachen Körper gilt für die Hauptachsen:
Die Achse (z-Achse), bei der das Trägheitsmoment des Körpers maximal ist, steht senkrecht auf der Körperebene. Die beiden anderen Achsen liegen in der Körperebene.
Es seien x und y die beiden Achsen, die in beliebiger Orientierung in der Körperebene liegen.
Dann kann man diese beiden Achsen in der Ebene so um einen Winkel δ drehen, dass für eine dieser Achsen das Trägheitsmoment maximal und für die andere minimal wird.
Der Drehwinkel δ ergibt sich aus den Trägheitsmomenten J_x, J_y und J_{xy} berechnet im Ausgangssystem zu:

$$\tan 2\delta = \frac{2\,J_{xy}}{J_y - J_x}$$

Das Trägheitsmoment bezüglich der gedrehten Achsen in der Ebene errechnet sich zu:

$$J_{\substack{\max \\ \min}} = \frac{1}{2}\left(J_y + J_x\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(J_y - J_x\right)^2 + \left(2\,J_{xy}\right)^2}$$

Vergleich von Größen bei Schiebung und bei Drehung

Schiebung (Translation)		**Drehung (Rotation)**	
Ortskoordinate	s	Winkel	φ
Geschwindigkeit	v	Winkelgeschwindigkeit	ω
Beschleunigung	a	Winkelbeschleunigung	α
Kraft	F	(Dreh-)Moment	M
Masse	m	Massenträgheitsmoment	J
Bewegungsgröße	mv	Drall	$J\omega$
Impuls	$\int \vec{F}\,\mathrm{d}t$	Drehimpuls	$\int \vec{M}\,\mathrm{d}t$

Änderung des Dralls D bei angreifendem Drehmoment M: $\frac{\mathrm{d}\vec{D}}{\mathrm{d}t} = \vec{M}$

Drallsatz: Die zeitliche Änderung des Dralls $\vec{D}$ ist gleich dem Moment $\vec{M}$, das diese Änderungen hervorruft.

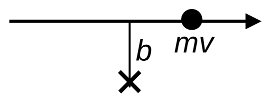
Ohne äußeres Moment (M = 0), z.B. bei freiem System, ist $\vec{D}$ konstant.

Drall-Erhaltungs-Satz: (z.B. beim Drehstoß)

Drall nachher	=	Drall vorher	+	Wirkung des Drehimpulses
$J \cdot \vec{\omega}_2$	=	$J \cdot \vec{\omega}_1$	+	$\int_1^2 \vec{M}\,\mathrm{d}t$

Drall einer Punktmasse bei linearer Bewegung:

$$D = b\,v\,m$$



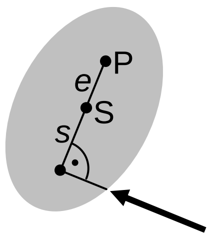
Zwei über Zahnräder gekoppelte Rotoren I und II

Massenträgheitsmoment beider Rotoren reduziert auf Rotor I (i: Übersetzungsverhältnis)

$$J_{\mathrm{I\,red}} = J_{\mathrm{I}} + J_{\mathrm{II}} \cdot \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 = J_{\mathrm{I}} + J_{\mathrm{II}} \cdot i^2$$

Stoßmittelpunkt

Bei einem exzentrischen Stoß ist der Stoßmittelpunkt P der Punkt, auf den keine Kraft übertragen wird. Das ist der momentane Drehpol. Erfolgt der Stoß mit senkrechtem Abstand s vom Schwerpunkt S, so liegt der Stoßmittelpunkt im Abstand $e = J_S/(m \cdot s)$ vom Schwerpunkt auf der Normalen zur Stoßlinie, die durch den Schwerpunkt geht.



Präzession

Greift an einen schnell drehenden Kreisel, der den Drall $\vec{D}$ hat, ein Moment $\vec{M}$ an, so kommt es zu einer Präzession mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}_P$. Es gilt:

$$\vec{M} = \vec{\omega}_P \times \vec{D} = J \cdot \vec{\omega}_P \times \vec{\omega}$$

Ein Kreisel weicht bei Einwirkung einer Kraft immer senkrecht zu der Richtung aus, die die Statik erwarten lässt. Die Ausweichrichtung ergibt sich nach der Merkregel "Kreiselachse jagt Momentenvektor".

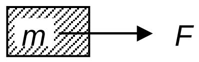
Erzwungene Präzession

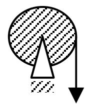
Die Kreiselachse wird durch einen äußeren Einfluss im Raum mit der Winkelgeschwindigkeit ω_P gedreht. Die Trägheitskräfte des Kreisels erzeugen dann das Kreiselmoment M_K:

$$\vec{M}_K = J \cdot \vec{\omega} \times \vec{\omega}_P$$
$$= \vec{D} \times \vec{\omega}_P$$

7. Prinzip von d'Alembert

Nach Newton gibt es Kräfte und Drehmomente





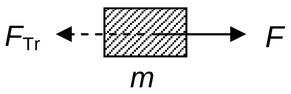
Die an einer Masse m angreifende äußere Kraft F bewirkt eine Beschleunigung a

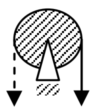
$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Das an einem Körper (Trägheitsmoment J) angreifende äußere Drehmoment M bewirkt eine Winkelbeschleunigung α.

$$\vec{M} = J \cdot \vec{\alpha}$$

Einführung von Scheinkraft und Scheinmoment





Die an einer Masse m angreifende äußere Kraft F bewirkt eine Trägheitskraft F_{Tr} des Körpers. Damit herrscht ein Gleichgewicht aller Kräfte, d.h., die Summe aller Kräfte ist Null.

$$\vec{F} \underbrace{- m \cdot \vec{a}}_{\text{Trägheitskraft}} = 0$$

Das an einem Körper (Trägheitsmoment J) angreifende äußere Drehmoment M bewirkt ein Trägheitsmoment. Damit herrscht Gleichgewicht aller Momente, d.h., die Summe aller Drehmomente ist Null.

$$\vec{M} \underbrace{- J \cdot \vec{\alpha}}_{\text{Trägheitsmoment}} = 0$$

Der d'Alembertsche Ansatz liefert eine elegante Formulierung der Kinetik. In vereinfachter Version dieses Ansatzes werden Kräfte und Momenten eingeführt, die aus dem Widerstand eines Körpers resultieren, also aus seiner Trägheit, seine Bewegung zu ändern.

vom Körper erzeugte <u>Trägheitskraft</u>: $\vec{F} = -m \cdot \vec{a}$

aufzubringende Kraft, um Körper mit $\vec{a}$ zu beschleunigen: $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

vom Körper erzeugtes <u>Trägheitsmoment</u>: $\vec{M} = -J_S \cdot \vec{\alpha}$

aufzubringendes Moment, um Körper mit $\vec{\alpha}$ zu beschleunigen: $\vec{M} = J_S \cdot \vec{\alpha}$

<u>Prinzip von d'Alembert:</u> Unter Benutzung von Trägheitskräften und Trägheitsmomenten lässt sich der momentane Zustand eines Körpers so schreiben, dass die Summen der Kräfte und der Momente Null sind:

$$\boxed{\sum \vec{F} = 0} \qquad \boxed{\sum \vec{M} = 0}$$

Koordinatensysteme

kartesisch (x- und y-Richtung)	$\sum F_x - m \cdot a_x = 0$	$\sum F_y - m \cdot a_y = 0$
polar (radial und azimuthal)	$\sum F_r - m \cdot a_r = 0$	$\sum F_\varphi - m \cdot a_\varphi = 0$
natürlich (normal und tangential)	$\sum F_n - m \cdot a_n = 0$	$\sum F_t - m \cdot a_t = 0$

Normalkraft = Zentrifugalkraft = Fliehkraft $\quad Z = m \frac{v^2}{r} = m\, r\, \omega^2$

Coriolis-Beschleunigung und -Kraft $\quad \vec{a}_{\text{cor}} = 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{rel}}$

$$\vec{F}_{\text{cor}} = -m\,\vec{a}_{\text{cor}} = 2m\,\vec{v}_{\text{rel}} \times \vec{\omega}$$

Drehung um eine Hauptachse
Der Schwerpunkt ist in Ruhe, die Resultierende aller Kräfte ist Null.
Die wirkenden Kräfte lassen sich zu einem Kräftepaar (Moment) zusammenfassen, das die beschleunigte Drehung verursacht.

Drehung um eine zur Hauptachse parallele Achse
Die Trägheitsreaktionen werden auf die Schwerpunktachse bezogen.
Die Trägheitskraft ergibt sich aus der Schwerpunktbeschleunigung $m \cdot \vec{a}_S$.
Das Trägheitskräftepaar ergibt sich aus dem auf die Schwerpunktachse bezogenen Trägheitsmoment $J_S \cdot \vec{\alpha}$

Drehung um eine beliebige Achse
Die Vektoren $\vec{M}$ und $\vec{\omega}$ sind nicht kollinear.
Bei einer Drehung um die y-Achse hat der Momentenvektor folgende Komponenten:

$$M_x = J_{xy} \cdot \alpha + J_{yz} \cdot \omega^2$$

$$M_y = -J_y \cdot \alpha$$

$$M_z = -J_{xy} \cdot \omega^2 + J_{yz} \cdot \alpha$$

Die umlaufenden Momente M_x und M_y belasten die Lager zusätzlich.
Sie verschwinden, wenn die Zentrifugalmomente Null werden.
Das ist bei einer Hauptachse der Fall (erreichbar durch dynamisches Auswuchten).

8. Energie

Arbeit bei Translation: $W = \int_1^2 \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$

Arbeit bei Rotation: $W = \int_1^2 \vec{M} \cdot \mathrm{d}\vec{\varphi}$

Arbeit bei Deformation: $W = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \left(s_2^2 - s_1^2\right)$ $\quad \left(c = \frac{F}{s} = \text{Federkonstante}\right)$

Leistung allgemein: $P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$

Leistung bei Translation: $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$

Leistung bei Rotation: $P = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$

Leistung bei beschleunigter Translation: $P = m \cdot \vec{a} \cdot \vec{v}$

Leistung bei beschleunigter Rotation: $P = J \cdot \vec{\alpha} \cdot \vec{\omega}$

Energie: Energie ist das Vermögen, Arbeit zu verrichten

potentielle Energie: $E_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot h$

kinetische Energie der Translation: $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$

kinetische Energie der Rotation: $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} J \cdot \omega^2$

elastische Energie bei Deformation:

lineare Feder: $E_{\text{el}} = \frac{1}{2} c \cdot s^2$

Torsionsfeder $E_{\text{el}} = \frac{1}{2} c_{\text{T}} \cdot \varphi^2$

Druckenergie: $E_{\text{Dr}} = p \cdot V$

Energiesatz:

In einem abgeschlossenen System ist die Summe aller vorhandenen Energien konstant.

Bernoulli-Gleichung: $$\underbrace{\tfrac{1}{2} \rho \cdot v^2}_{\text{dynamischer Druck}} + \underbrace{\rho \cdot g \cdot h}_{\text{Schwere-Druck}} + \underbrace{p}_{\text{statischer Druck}} = \text{const}$$

kinetische Energie eines starren Körpers:

$$E_{\text{kin}} = \begin{pmatrix}\text{Translationsenergie} \\ \text{des Schwerpunktes}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Rotationsenergie} \\ \text{um Schwerpunkt}\end{pmatrix} = \tfrac{1}{2} m\, v_{\text{S}}^2 + \tfrac{1}{2} J_{\text{S}} \cdot \omega^2$$

$$E_{\text{kin}} = \begin{pmatrix}\text{Rotationsenergie um} \\ \text{momentanen Drehpol M}\end{pmatrix} = \tfrac{1}{2} J_{\text{M}} \cdot \omega^2$$

9. Mechanische Schwingungen

9.1 ungedämpfte Schwingungen

Eine Schwingung basiert auf dem Gleichgewicht von Trägheitskraft bzw. Trägheitsmoment eines bewegten Körpers und Rückstellkraft bzw. Rückstellmoment zur Ruhelage hin.
Die Rückstellung kann durch Schwerkraft oder federelastische Kraft erfolgen.

Differentialgleichung der ungedämpften harmonischen Schwingung mit einem Freiheitsgrad.

	lineare Schwingung einer Masse m, die an einer Feder mit Federkonstante c befestigt ist:	Drehschwingung eines Körpers mit Trägheitsmoment J_A, der an Torsionsfeder mit Federkonstante c_T befestigt ist:
Differentialgleichung mit Systemgrößen	$m \cdot \ddot{y} + c \cdot y = 0$	$J_A \cdot \ddot{\varphi} + c_T \cdot \varphi = 0$
Differentialgleichung in Parameterdarstellung	$\ddot{y} + \omega_0^2 \, y = 0$	$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \, \varphi = 0$
Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems	$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$	$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{c_T}{J_A}}$
Lösung der Differentialgleichung	$y = y_0 \, e^{-\delta t} \sin\left(\omega_d t + \phi_0\right)$	$\varphi = \varphi_0 \, e^{-\delta t} \sin\left(\omega_d t + \phi_0\right)$

Eigenkreisfrequenz: ω_0

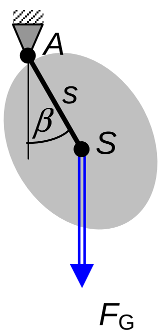
Eigenfrequenz: $f_0 = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega_0}{2\pi}$

Periodendauer: $T = \dfrac{1}{f_0} = \dfrac{2\,\pi}{\omega_0}$

Maximalwerte:

	bei linearer Schwingung	bei Drehschwingung
maximale Auslenkung (Amplitude):	y_0	φ_0
max. Geschw. beim Null-Durchgang:	$v_{max} = y_0 \, \omega_0$	$\omega_{max} = \varphi_0 \, \omega_0$
max. Beschleunigung im Umkehrpunkt:	$a_{max} = -y_0 \, \omega_0^2$	$\alpha_{max} = -\varphi_0 \, \omega_0^2$

Rückstell- bzw. Kippmoment durch Schwerkraft (*s* = Abstand Schwerpunkt – Drehachse):



Das Drehmoment M durch die Schwerkraft ist $M = m\,g\,s \sin\beta$.

Der momentane Auslenkungswinkel β kann als Summe aus dem Auslenkungswinkel β_0 in der Ruhelage und dem Auslenkungswinkel φ der Schwingung geschrieben werden, also $\beta = \beta_0 + \varphi$.

Im Folgenden wird immer die Näherung gemacht, dass φ sehr klein ist.

a) Im einfachsten Fall ist in der Ruhelage $\beta_0 = 0$.
Dann ergibt sich: $M \approx m\,g\,s\,\varphi$ und $c_T = M / \varphi \approx m\,g\,s$

β) Im Fall, dass $\beta_0 \neq 0$, erhält man für das Drehmoment:

$$M \approx m\,g\,s\,(\underbrace{\sin\beta_0}_{\text{konstantes Drehmoment in der Ruhelage}} + \underbrace{\varphi\cos\beta_0}_{\text{vom momentanen Auslenkwinkel abhängiges Drehmoment}})$$

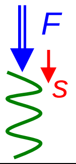
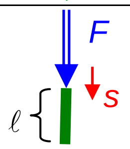
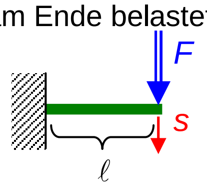
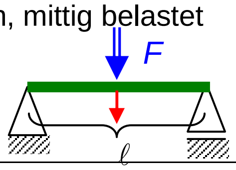
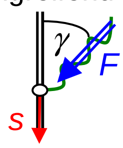
Damit ergibt sich für das bei einer Schwingung relevante Rückstell- bzw. Kippmoment (positiv, wenn S unterhalb *A*, negativ, wenn S oberhalb *A)*

$$c_T = \frac{\text{rückstellendes Drehmoment}}{\text{Auslenkwinkel}} \approx m\,g\,s\cos\beta_0$$

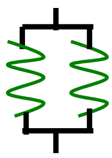
Rückstellung durch federelastische Kräfte

Federkonstante: Definition: Wirkt auf ein **Federelement** eine **Kraft *F***, so bewirkt diese eine **Längenänderung *s***. Das Verhältnis von F und s wird als Federkonstante c bezeichnet.

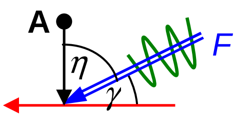
Federelemente:

Feder 	$c = \dfrac{F}{s}$	c Federkonstante F wirkende Kraft s Längenänderung
Stab, Seil 	$c = \dfrac{E\,A}{\ell}$	E Elastizitätsmodul A Querschnittsfläche ℓ Länge
Biegefeder, am Ende belastet 	$c = 3\,\dfrac{E\,I}{\ell^3}$	E Elastizitätsmodul I Flächenträgheitsmoment, bei Rundstab: $I = {}^{\pi}/_{4}\, r^{4}$ bei Rechteckstab: $I = {}^{1}/_{12}\, b\, h^{3}$ ℓ Länge
Biegebalken, mittig belastet 	$c = 48\,\dfrac{E\,I}{\ell^3}$	E Elastizitätsmodul I Flächenträgheitsmoment wie bei Biegefeder ℓ Länge
Feder, schräg angreifend 	$c_{\text{eff}} = c\cos^2\gamma$	c_{eff} wirksame Federkonstante c Federkonstante der Feder γ Winkel zwischen Richtung der Federkraft und der Bewegungsrichtung

Parallel- und Serienschaltung von Federn

Parallelschaltung (Addition von Kräften) 	$c_{\text{eff}} = c_1 + c_2$ allgemein: $c_{\text{eff}} = \sum c_i$	c_{eff} wirksame Federkonstante c_1 Federkonstante Feder 1 c_2 Federkonstante Feder 2
Serienschaltung (Addition von Wegen) 	$\dfrac{1}{c_{\text{eff}}} = \dfrac{1}{c_1} + \dfrac{1}{c_2}$ allgemein: $\dfrac{1}{c_{\text{eff}}} = \sum \dfrac{1}{c_i}$	c_{eff} wirksame Federkonstante c_1 Federkonstante Feder 1 c_2 Federkonstante Feder 2

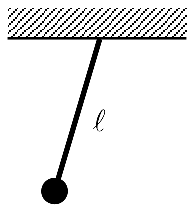
Rückstellmoment um Achse A, erzeugt durch die Kraft F einer linearen Feder mit Federkonstanten c, die an einem Hebel mit Kraftarm r angreift.



η Winkel zwischen Kraftrichtung (blau) und Hebelarm (schwarz)
γ Winkel zwischen Kraftrichtung (blau) und Bewegungsrichtung (rot)

$$c_T = \frac{\text{rückstellendes Drehmoment}}{\text{Auslenkwinkel}} = c\, r^2 \cos^2\gamma = c\, r^2 \sin^2\eta$$

<u>Beispiel: mathematisches Pendel</u> mit punktförmiger Masse



Pendellänge ℓ

Massenträgheitsmoment $J_A = m\,\ell^2$

Eigenkreisfrequenz $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell}}$

Periodendauer $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

<u>Beispiel: physikalisches Pendel</u> mit rückstellender Feder und Dämpfer

A Achse der Pendeldrehung

S Schwerpunkt des Körpers

s Abstand Schwerpunkt-Drehachse:
$s > 0$, wenn Achse oberhalb des Schwerpunktes
$s < 0$, wenn Achse unterhalb des Schwerpunktes

F Angriffspunkt der Feder

D Angriffspunkt des Dämpfers

r Abstand Schwerpunkt – Kraftangriffspunkt

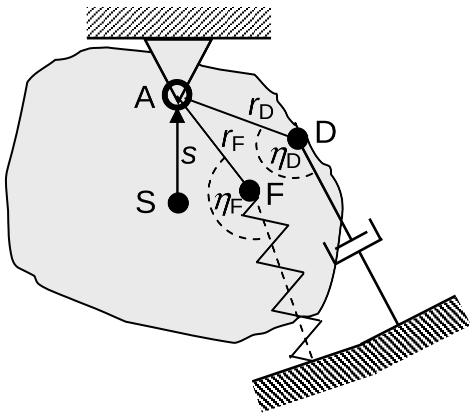
c Federkonstante

b Dämpfungskonstante

η Winkel zwischen Radius *r* und Kraftrichtung

Index F bezogen auf Feder

Index D bezogen auf Dämpfer



Eigenkreisfrequenz ungedämpft $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgs + cr^2\sin^2\eta_F}{J_s + ms^2}}$

Periodendauer ungedämpft $T = 2\pi\sqrt{\frac{J_s + ms^2}{mgs + cr^2\sin^2\eta_F}}$

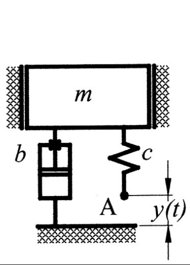
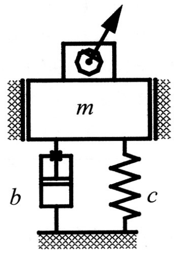
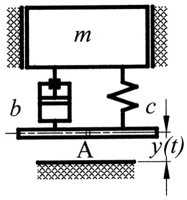
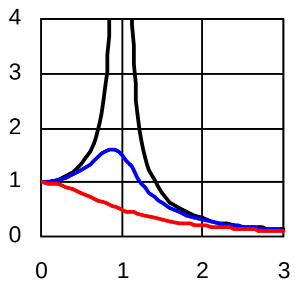
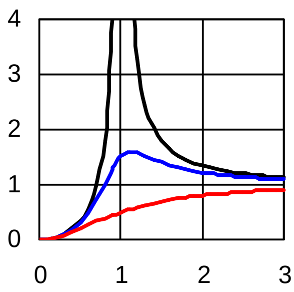
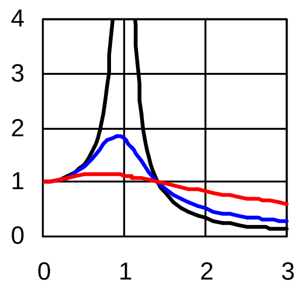
Hinweis: Die Dämpfungskonstante b_T der Drehung (siehe Kapitel 9.2) errechnet sich analog zur entsprechenden Federgröße der Drehung zu $b_T = b\, r_F^2 \sin^2 \eta_F^2$.

9.2 gedämpfte Schwingungen

Es wird angenommen, dass die Dämpfung proportional zur Geschwindigkeit ist.

	lineare Schwingung	Drehschwingung
Differentialgleichung mit Systemgrößen	$m \cdot \ddot{y} + b \cdot \dot{y} + c \cdot y = 0$	$J_A \cdot \ddot{\varphi} + b_T \cdot \dot{\varphi} + c_T \cdot \varphi = 0$
Differentialgleichung in Parameterdarstellung	$\ddot{y} + 2\vartheta \cdot \omega_0 \cdot \dot{y} + \omega_0^2 \, y = 0$	$\ddot{\varphi} + 2\vartheta \cdot \omega_0 \cdot \dot{\varphi} + \omega_0^2 \, \varphi = 0$
Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems	$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{c_T}{J_A}}$
Dämpfungskonstante	$b = \frac{\text{Dämpfungskraft}}{\text{Geschwindigkeit}} = \frac{F_D}{\dot{y}}$ $[b] = \frac{\text{kg}}{\text{s}} = \frac{\text{N}}{\text{m/s}}$	$b_T = \frac{\text{Dämpfungsmoment}}{\text{Winkelgeschwindigkeit}}$ $b_T = \frac{M_D}{\dot{\varphi}} = b\, r^2$ $[b_T] = \frac{\text{Nm}}{\text{1/s}}$
Abklingkonstante	$\delta = \frac{b}{2\,m}$ $\quad [\delta] = \frac{1}{\text{s}}$	$\delta = \frac{b_T}{2\,J_A}$ $\quad [\delta] = \frac{1}{\text{s}}$
Dämpfungsgrad = Lehrsches Dämpfungsmaß	$\vartheta = \frac{\delta}{\omega_0}$ $\quad [\vartheta] = 1$ $\vartheta = 0$ ungedämpfte Schwingung $\vartheta > 0 \ldots < 1$ schwach gedämpfte Schwingung $\vartheta = 1$ kritisch gedämpfte Schwingung, aperiodischer Grenzfall $\vartheta > 1$ Kriechfall	
Kreisfrequenz der gedämpften Schwingung	$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \vartheta^2}$	
Lösung der Differentialgleichung	$y = y_0 \, e^{-\delta t} \sin(\omega_d t + \phi_0)$	$\varphi = \varphi_0 \, e^{-\delta t} \sin(\omega_d t + \phi_0)$
logarithmisches Dekrement	$\Lambda = \ln\left[\frac{y(t)}{y(t+T_d)}\right] = \ln\left[\frac{\varphi(t)}{\varphi(t+T_d)}\right] = \frac{2\,\pi\,\vartheta}{\sqrt{1-\vartheta^2}}$	

9.3 erzwungene Schwingungen

Erregung	Wegerregung (periodische Auslen-kung mit Amplitude r greift über Feder an)	Massenkrafterregung (Unwuchtmasse m_e schwingt periodisch mit Amplitude e)	Stützenerregung (periodische Auslenkung mit Amplitude y_0 greift an Feder und Dämpfer an)
			
Dämpfungs-grad	$\vartheta = \dfrac{\delta}{\omega_0}$		
Abstimmungs-verhältnis	$\eta = \dfrac{\text{Erregerfrequenz}}{\text{Eigenfrequenz}} = \dfrac{\omega_e}{\omega_0}$		
Amplitude der schwingenden Masse m	$A = V_1 \cdot r = V_1 \cdot \dfrac{F_e}{c}$	$A = V_3 \cdot \dfrac{m_e}{m} \cdot e$	$A = V_2 \cdot y_0$
Vergrößer-ungsfaktor	$V_1 = \dfrac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2\vartheta\eta)^2}}$	$V_3 = \dfrac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2\vartheta\eta)^2}}$	$V_2 = \sqrt{\dfrac{1+(2\vartheta\eta)^2}{(1-\eta^2)^2+(2\vartheta\eta)^2}}$
Kurven V gegen η schwarz: $\vartheta = 0$ blau: $\vartheta = 1/3$ rot: $\vartheta = 1$			
Phasenwinkel zwischen Anregung und Masse	$\varphi = \arctan \dfrac{2\vartheta\eta^2}{1-\eta^2}$	$\varphi = \arctan \dfrac{2\vartheta\eta}{1-\eta^2}$	$\varphi = \arctan \dfrac{2\vartheta\eta^3}{1-\eta^2+(2\vartheta\eta)^2}$
Amplitude bei kleiner Dämpfung und Resonanz (η =1)	$A_R = \dfrac{r}{2\vartheta}$	$A_R = \dfrac{e}{2\vartheta}\ \dfrac{m_e}{m}$	$A_R = \dfrac{y_0\sqrt{1+4\vartheta^2}}{2\vartheta}$
Belastungskraft	am Aufhängepunkt der Feder $F = m\ r\ \ \omega_e^2\ \ V_1$	auf das Fundament $F = m_e\ \ e\ \ \omega_e^2\ \ V_3$	

<u>Biegekritische Drehzahl:</u> $n_K = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{c}{m}}$

10. Mathematischer Anhang

Berechnung eines beliebigen Dreiecks:

Ein beliebiges Dreieck hat 6 Parameter: 3 Seitenlängen und 3 Winkel.

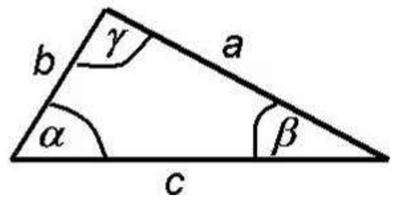
Es lassen sich alle Parameter berechnen, wenn 3 Parameter bekannt sind, von denen mindestens einer eine Seitenlänge ist.

Zur Berechung dienen folgenden Sätze:

Sinussatz: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

Kosinussatz:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$$



Einige Ableitungen:

Funktion $y(x)$	Ableitung $y'(x)$
c	0
x^m	$m\, x^{m-1}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin cx$	$c \cos cx$
$\cos cx$	$-c \sin cx$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x \;=\; \cos^{-2} x$
$\cot x$	$- \sin^{-2} x$
e^x	e^x
a^x	$a^x \cdot \ln(a)$
$\ln x$	x^{-1}
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\text{arccot}\, x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Einige Integrale:

Integral	Lösung
$\int x^n \, dx$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\int \frac{dx}{x}$	$\ln x$
$\int \frac{a\,dx}{ax+b}$	$\ln(ax+b)$
$\int \frac{dx}{\sqrt{c^2-x^2}}$	$\arcsin \frac{x}{c}$
$\int e^{cx}\, dx$	$\frac{1}{c} e^{cx}$
$\sin cx$	$-\frac{1}{c} \cos cx$
$\cos cx$	$\frac{1}{c} \sin cx$

weitere Integrale siehe z.B.:
http://www.wikibooks.de
→ Formelsammlung Mathematik
→ Analysis
→ unbestimmte Integrale