

Vektorrechnung

Punkt	$Q = \vec{q}$	Vektorbetrag (Länge des Vektors)	$ \vec{q} = \sqrt{(q_x)^2 + (q_y)^2 + (q_z)^2}$
Gerade	$g: \vec{p} + \lambda \vec{a}$	$\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$	Kreuzprodukt/ Vektorprodukt
Ebene, Parameterform	$E: \vec{r} + \mu \vec{x} + \nu \vec{y}$		
Ebene, Normalenform	$E \{ \vec{r}_0 (\vec{r}_0 - \vec{r}) \cdot \vec{n} = 0 \}$		
Abstand Punkt-Punkt	$d = \vec{q}_1 - \vec{q}_2 $	Skalarprodukt	$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$
Abstand Punkt-Gerade	$d = \frac{ \vec{a} \times (\vec{q} - \vec{p}) }{ \vec{a} }$	Normalenvektor der Ebene	$\vec{n} = \vec{x} \times \vec{y}$ Probe $\vec{n} \cdot \vec{x} = 0, \vec{n} \cdot \vec{y} = 0$
Abstand Punkt-Ebene (Parameterform)	$d = \frac{ (\vec{q} - \vec{r}) \cdot (\vec{x} \times \vec{y}) }{ \vec{x} \times \vec{y} }$	Abstand Gerade-Gerade (1. Fall, parallel)	$d = \frac{ \vec{a}_1 \times (\vec{p}_1 - \vec{p}_2) }{ \vec{a}_1 }$ $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \vec{0}$
Abstand Punkt-Ebene (Normalenform)	$d = \frac{ (\vec{q} - \vec{r}) \cdot \vec{n} }{ \vec{n} }$	Abstand Gerade-Gerade (2. Fall, nicht parallel)	$d = \frac{ (\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \cdot (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) }{ \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 }$ $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \neq \vec{0}$
Abstand Ebene-Ebene Normalenform	$d = \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot \vec{n}_1}{ \vec{n}_1 }$	Schnittwinkel Gerade-Gerade	$\varphi = \arcsin \left(\frac{ \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 }{ \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 } \right)$
1. Fall, $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{0}$		Abstand Gerade-Ebene (Normalenform)	$d = \frac{ (\vec{p} - \vec{r}) \cdot \vec{n} }{ \vec{n} }$ Falls $\vec{a} \cdot \vec{n} = 0$
2. Fall, $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \neq \vec{0}$	$d = 0$ Da die Ebenen sich schneiden	Schnittpunkt Gerade-Ebene (Normalenform)	$\vec{q}_s = \frac{(\vec{p} - \vec{r}) \cdot \vec{n}}{\vec{a} \cdot \vec{n}}$ Falls $\vec{a} \cdot \vec{n} \neq 0$
Schnittgerade Ebene-Ebene Normalen-/Parameterform	$((\vec{r}_2 + \mu_2 + \vec{v}_2) - \vec{r}_1) \cdot \vec{n}_1 = 0$	Schnittwinkel Gerade-Ebene	$\varphi = \arcsin \left(\frac{ \vec{a} \cdot \vec{n} }{ \vec{a} \cdot \vec{n} } \right)$ Falls $\vec{a} \cdot \vec{n} \neq 0$
Schnittwinkel Ebene-Ebene Normalenform	$\varphi = \arcsin \left(\frac{ \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 }{ \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 } \right)$		

Rechenregeln für Ungleichungen

$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$	$a < b \Leftrightarrow a \cdot c > b \cdot c \ (c < 0)$
$a < b \text{ und } b < c \Leftrightarrow a < c$	$a < b \Leftrightarrow 1/a > 1/b \ (a, b > 0)$
$a < b \Leftrightarrow a \cdot c < b \cdot c \ (c > 0)$	$a < b \Leftrightarrow 1/a > 1/b \ (a, b > 0)$

1. Wertebereich bestimmen $x \in \mathbb{R} \setminus \{ \text{ausgeschlossene Werte} \}$

2. Fälle bestimmen (Bereiche Zwischen denen die Beträge das Vorzeichen wechseln, ggf. Zahlenstrahl erstellen)

03.01.11

4. Lösungsmenge bestimmen durch $L_{Gesamt} = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_n$

5. Lösungsmenge mit Antwortsatz

$$L_{Gesamt} = \{ x \in \mathbb{R} \mid \text{Untergrenze} \leq x < \text{kritischer Punkt} \mid \text{kritischer Punkt} < x \leq \text{Obergrenze} \}$$

Besondere Winkelfunktionen

α	α	sin(α)	cos(α)	tan(α)
0°	0	0	1	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	-

Die wichtigsten Ableitungen bzw. Stammfunktionen

f(x)	f'(x)
x^a	ax^{a-1}
e^x	e^x
$a^x = e^{x \ln a}$	$a^x \ln a$
$\ln x $	$\frac{1}{x}$
$\log_a x = \frac{1}{\ln a} \ln x $	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

f(x)	f'(x)
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\cosh x$
$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\sinh x$
$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	$\frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$
$\operatorname{coth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$	$-\frac{1}{\sinh^2 x} = 1 - \operatorname{coth}^2 x$
$\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$
$\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln \left \frac{1+x}{1-x} \right $	$\frac{1}{1-x^2}$
$\operatorname{arcoth} x = \frac{1}{2} \ln \left \frac{1-x}{1+x} \right $	$\frac{1}{1-x^2}$

Quadratzahlen $f_{(n)} = n^2 \quad n = \{0, 1, \dots, 49, 50\}$

[0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400, 441, 484, 529, 576, 625, 676, 729, 784, 841, 900, 961, 1024, 1089, 1156, 1225, 1296, 1369, 1444, 1521, 1600, 1681, 1764, 1849, 1936, 2025, 2116, 2209, 2304, 2401, 2500]

Quadratwurzeln

$\sqrt{8} = 2 \cdot \sqrt{2}$	$\sqrt{20} = 2 \cdot \sqrt{5}$	$\sqrt{28} = 2 \cdot \sqrt{7}$	$\sqrt{44} = 2 \cdot \sqrt{11}$
$\sqrt{12} = 2 \cdot \sqrt{3}$	$\sqrt{24} = 2 \cdot \sqrt{6}$	$\sqrt{32} = 4 \cdot \sqrt{2}$	$\sqrt{45} = 3 \cdot \sqrt{5}$
$\sqrt{18} = 3 \cdot \sqrt{2}$	$\sqrt{27} = 3 \cdot \sqrt{3}$	$\sqrt{40} = 2 \cdot \sqrt{10}$	$\sqrt{48} = 4 \cdot \sqrt{3}$

Logarithmus Rechenregel

$$\begin{aligned} \ln(a) + \ln(b) &= \ln(a \cdot b) \\ \ln(a) - \ln(b) &= \ln\left(\frac{a}{b}\right) \\ \ln(a^b) &= b \cdot \ln(a) \\ a^b &= \exp(b \cdot \ln(a)) = e^{b \cdot \ln(a)} \\ \ln\left(\frac{1}{x}\right) &= -\ln(x) \end{aligned}$$

Exponential Rechenregeln

$$\begin{aligned} a^{x+y} &= a^x \cdot a^y \\ a^{x \cdot y} &= (a^x)^y \\ a^{-x} &= \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x \\ a^x \cdot b^x &= (a \cdot b)^x \\ \frac{1}{a} &= a^{-1} \\ \sqrt[q]{a^p} &= a^{\frac{p}{q}} \end{aligned}$$

Geometrische Summenformel

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n q^k &= \left\{ \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \text{ falls } q \neq 1 \right\} \\ \sum_{k=0}^n q^k &= n+1, \text{ falls } q=1 \end{aligned}$$

Kurvendiskussion

1. Definitionsbereich festlegen	$f_{(x)} \in \mathbb{R} \setminus \{ \text{ausgeschlossene Elemente} \}$		
2. Nullstellen suchen	$f_{(x)} = 0$, mit Horner Schema oder pq-Formel $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ bei Polynom 2. Grades $x^2 + px + q$		
3. Ableitungen	$f'_{(x)} = \frac{d}{dx} f_{(x)}$ $f''_{(x)} = \frac{d^2}{dx^2} f_{(x)}$ $f'''_{(x)} = \frac{d^3}{dx^3} f_{(x)}$		
3.1 1. Ableitung, lokale Extrema	$f'_{(x)} = 0$	Produktregel $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ Kettenregel $(f \circ g)' = f'(g) \cdot g'$ Quotientenregel $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$	1. binomische Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$ 2. binomische Formel $(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$ 3. binomische Formel $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$
3.2 2. Ableitung, Wendepunkte	$f''_{(x)} = 0$		
3.2 3. Ableitung, Kontrolle			
4. Asymptotisches Verhalten (verhalten an den Rändern des Definitionsbereich)	$f_{(Rand)} = ?$ (bei "echten Randbereichen") $\lim_{x \rightarrow \infty} f_{(x)}$ (bei $\pm\infty$ als Randbereich)		
5. Zeichnung des Funktionsgraphen			
6. globale Extrema	- lokale Extrema - Randbereiche - Definitionslücken der 1. Ableitung		

